



جامعة مولاي إسماعيل
ⵜⴰⵎⴻⵔⴰⵏⵜ ⵏ ⵎⴰⵙⴰⵏ ⵏ ⵉⵎⴰⵏⵉⵏ
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL



كلية العلوم
ⵜⴰⵎⴻⵔⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⴰⵎⴻⵔⴰⵏⵜ
FACULTÉ DES SCIENCES

Département de mathématiques

Année universitaire 2025-2026
SMA-LNG S IV - Analyse 5

Analyse 5

Y. Mazigh

Chapitre 4

Formes différentielles

4.1 Formes multilinéaires alternées

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Pour tout entier $k \geq 1$, on note $\mathcal{L}_k(E)$ l'espace vectoriel des formes k -linéaires sur E . Un élément $u \in \mathcal{L}_k(E)$ est une application

$$u : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que $a \mapsto u(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_k)$ est linéaire pour tout choix de $i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k$. On rappelle que $\mathcal{L}_1(E) = E^*$ est l'espace dual de E et que $u \in E^*$ est une forme linéaire sur E .

Une forme $u \in \mathcal{L}_k(E)$ est dite *alternée* si

$$u(x_1, \dots, x_k) = 0$$

dès que $x_i = x_j$ pour $i \neq j$, $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$. Notons $\mathcal{A}_k(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_k(E)$ formé des formes k -linéaires alternées sur E . On convient que $\mathcal{A}_0(E) = \mathbb{R}$ et que $\mathcal{L}_1(E) = \mathcal{A}_1(E) = E^*$.

Exercice 6 1. Montrer que $u \in \mathcal{A}_k(E)$ si et seulement si u est anti-symétrique, c'est-à-dire

$$u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = -u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k)$$

pour tout choix $u(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $1 \leq i < j \leq k$.

2. Soit $\sigma \in S_k$ une permutation de $\{1, \dots, k\}$. Montrer que si $u \in \mathcal{A}_k(E)$, alors

$$u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma) u(x_1, \dots, x_k)$$

pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\epsilon(\sigma)$ étant la signature de σ .

Maintenant, si $u_1, \dots, u_k \in E^*$, on définit le produit extérieur $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ par

$$u = u_1 \wedge \dots \wedge u_k : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_k) \longmapsto \begin{vmatrix} u_1(x_1) & \dots & u_1(x_k) \\ \vdots & & \vdots \\ u_k(x_1) & \dots & u_k(x_k) \end{vmatrix}$$

Il est alors clair que $u \in \mathcal{A}_k(E)$. En fait, toutes les formes k -linéaires peuvent s'obtenir de cette façon. Plus précisément

Théorème 13 Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ la base de E^* . Alors la famille

$$\{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

est une base de $\mathcal{A}_k(E)$. En particulier

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_k(E) = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□

Dans la suite $E = \mathbb{R}^n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n et $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ sa base duale. Par commodité, on note pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $dx_i = e_i^*$:

$$\begin{aligned} dx_i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = \sum_{j=1}^n x_j e_j &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_k(E)$,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

où les a_{i_1, \dots, i_k} sont des réels, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{A}_0(E)$. Si

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \in \mathcal{A}_p(E)$$

et

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} b_{j_1, \dots, j_q} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \in \mathcal{A}_q(E)$$

On définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{A}_{p+q}(E)$ par :

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} a_{i_1, \dots, i_p} b_{j_1, \dots, j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}.$$

Proposition 11 On a :

1. *Linéarité*

- $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma.$ $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_p(E), \gamma \in \mathcal{A}_q(E)$
- $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma,$ $\alpha \in \mathcal{A}_p(E), \beta, \gamma \in \mathcal{A}_q(E)$
- $t\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge t\beta = t(\alpha \wedge \beta).$ $\alpha \in \mathcal{A}_p(E), \beta \in \mathcal{A}_q(E), t \in \mathbb{R}.$

2. *Anti-commutativité*

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}_p(E), \forall \beta \in \mathcal{A}_q(E)$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

3. *Associativité*

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}_p(E), \forall \beta \in \mathcal{A}_q(E), \forall \gamma \in \mathcal{A}_r(E)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Preuve : Exercice.

4.2 Formes différentielles

Définition 16 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Si $p \geq 0$ est un entier, une forme différentielle de degré p sur U (ou une p -forme sur U) est une application

$$\omega : U \longrightarrow \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n).$$

On note $\Omega^p(U)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des p -formes différentielles sur U .

Rappelons que $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ et donc une 0-forme est une application $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable (ou une 0-forme dérivable), sa différentielle

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

est une 1-forme sur U .

On sait que $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ est une base de $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi si ω est une p -forme différentielle dans U , on a pour tout $a \in U$,

$$\omega(a) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1, \dots, i_p}(a) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

où les $f_{i_1, \dots, i_p} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont uniquement déterminées. C'est l'écriture canonique de la p -forme ω et les f_{i_1, \dots, i_p} sont les composantes de ω .

Remarque 9 Dans \mathbb{R}^2 on pourra noter (dx, dy) au lieu de (dx_1, dx_2) la base duale de la base canonique. De même dans \mathbb{R}^3 où on peut préférer noter les coordonnées (x, y, z) plutôt que (x_1, x_2, x_3) .

Produit extérieur

Soient $(\alpha, \beta) \in \Omega^p(U) \times \Omega^q(U)$,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \in \mathcal{A}_p(E)$$

et

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} g_{j_1, \dots, j_q} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \in \mathcal{A}_q(E)$$

On définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ par :

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} f_{i_1, \dots, i_p} g_{j_1, \dots, j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$$

Exercice 7 Vérifier que si $p + q > n$, alors $\alpha \wedge \beta = 0$.

Différentiation extérieure

Si $f \in \Omega^0(U)$ est une 0-forme de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) dans U , on définit

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

C'est une 1-forme de classe \mathcal{C}^{k-1} dans U . Si

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

est une p -forme de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$), on définit la différentielle extérieure de ω par :

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} df_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Ainsi $d\omega$ est une $(p+1)$ -forme de classe \mathcal{C}^{k-1} dans U .

Proposition 12

1. $\forall \alpha, \beta \in \Omega^p(U), \quad d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta.$
2. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \Omega^p(U), \quad d(t\alpha) = t d\alpha.$
3. $\forall \alpha, \beta \in \Omega^p(U), \forall \beta \in \Omega^q(U)$ de classe \mathcal{C}^1 sur U ,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

4. Pour toute forme $\omega \in \Omega^p(U)$ de classe \mathcal{C}^2 sur U

$$d(d\omega) = 0.$$

Démonstration : Les propriétés (1) et (2) sont équivalentes. La propriété (3) est laissée à titre d'exercice. Pour (4) :

- Si ω est une 0-forme, $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Donc

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j\right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

car

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

puisque f est de classe C^2 sur U .

- Pour $p \geq 1$, écrivons

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Alors

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} df_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

D'où

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} d(df_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \left[d^2 f_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} + (-1)^p df_{i_1, \dots, i_p} \wedge d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $d^2 f_{i_1, \dots, i_p} = 0$ et $d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = 0$.

4.3 Forme différentielle de degré 1

4.3.1 Intégrale d'une 1-forme le long d'une courbe paramétrée

Définition 17 Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , C une courbe paramétrée de \mathbb{R}^n de classe C^1 incluse dans U et $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ une 1-forme continue sur U . On appelle circulation de la 1-forme ω le long de la courbe C , le réel

$$\int_C \omega = \int_C \alpha dx$$

où $\int_C \alpha dx$ désigne l'intégrale curviligne de $\alpha : x \in U \mapsto (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x))$ le long de la courbe C .

Exemple 18 On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la forme différentielle

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

On note C le cercle unité orienté positif. On considère le paramétrage

$$\theta \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$$

Posons

$$\alpha(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \int_C \omega &= \int_0^{2\pi} \alpha \cdot d\mathbf{x} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} (\cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2} (-\sin(\theta))) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) d\theta = 2\pi
 \end{aligned}$$

□

Définition 18 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $\omega \in \Omega^1(U)$. On dit que ω est exacte s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^1$ sur U tel que $\omega = df$. Une telle fonction f s'appelle une primitive de ω .

Exemple 19

- La 1-forme $\omega = xdx + ydy$ est exacte sur n'importe quel ouvert de \mathbb{R}^2 , puisque $df = \omega$, où $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
- La 1-forme $\omega = ydx$ n'est exacte sur aucun ouvert de \mathbb{R}^2 . En effet, supposons par l'absurde qu'il existe U ouvert de \mathbb{R}^2 et une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur U tels que $df = \omega$. Alors pour tout $(x, y) \in U$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Par la deuxième égalité on obtient qu'il existe une fonction g de classe \mathcal{C}^1 sur U telle que $f(x, y) = g(x)$. Ainsi on devrait avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(x)$$

pour tout $(x, y) \in U$. Mais cela n'est pas compatible avec l'expression précédente.

□

Remarque 10 Soit F un champ de vecteurs sur U . On rappelle qu'on dit que F dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire f tel que $F = \text{grad}(f) = \nabla(f)$, où

$$\nabla(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Soit $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$. Posons

$$\omega = \sum_{i=1}^n F_i dx_i.$$

Alors F dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si la forme ω est exacte sur U .

La proposition suivante simplifie le calcul de l'intégrale curviligne, et explique l'intérêt de s'intéresser aux formes différentielles exacte

Proposition 13 Soit ω une forme exacte sur U , et on considère une primitive f de ω (ie. f est \mathcal{C}^1 sur U et $df = \omega$), et soit C une courbe paramétrée de U , de classe \mathcal{C}^1 et d'extrémités A et B . Alors

$$\int_C \omega = \int_C df = f(B) - f(A)$$

Démonstration Considérons un paramétrage $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ de la courbe C .
Posons

$$F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_C df \\ &= \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt \end{aligned}$$

Désignons par $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ les composantes de la fonction γ . On a

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A) \end{aligned}$$

Par suite

$$\int_C \omega = \int_C df = f(B) - f(A)$$

□

Corollaire 6 Si ω est une forme différentielle exacte sur U et C est une courbe fermée de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors

$$\int_C \omega = 0.$$

Exemple 20 La forme différentielle

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx$$

n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. D'après l'exemple 18, l'intégrale de ω sur le cercle unité est 2π , $\int_C \omega = 2\pi$, et donc ω n'est pas exacte d'après le corollaire 6. □

Définition 19 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit qu'une forme ω est fermée si $d\omega = 0$.

Proposition 14 Soit $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i \in \Omega^1(U)$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors

$$\omega \text{ est fermée} \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned}
 d\omega &= \sum_{i=1}^n d(\alpha_i dx_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n d\alpha_i \wedge dx_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i
 \end{aligned}$$

Comme $dx_i \wedge dx_i = 0$ et $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$, on obtient l'équivalence

$$d\omega = 0 \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$$

□

Remarque 11 *Toute forme exacte est fermée. En générale la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la forme*

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx$$

est fermée mais n'est pas exacte.

Moyennant certaines hypothèses sur l'ouvert U , pour une forme sur U de classe \mathcal{C}^1 on a équivalence entre être exacte et être fermée. Afin de formuler une condition sur l'ouvert U , nous allons introduire la notion d'ouvert étoilé.

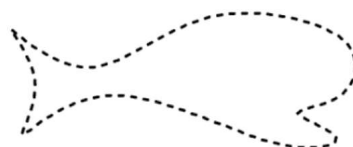
Définition 20 *Un ouvert U de \mathbb{R}^n est dit étoilé par rapport à $\mathbf{a} \in U$ si*

$$\forall x \in U \quad [\mathbf{a}, x] \subset U$$

où $[\mathbf{a}, x]$ le segment d'extrémités \mathbf{a} et x dans \mathbb{R}^n ;

$$[\mathbf{a}, x] := \{y \in \mathbb{R}^n; \exists \lambda \in [0, 1] \ y = \lambda x + (1 - \lambda)\mathbf{a}\}$$

Exemple 21 *Tout ouvert convexe est un ouvert étoilé. par contre, la réciproque est fausse : il existe des ouverts qui sont étoilés sans être convexes.*



Ouvert étoilé non convexe

□

Théorème 14 (Théorème de Poincaré) *Si U est un ouvert étoilé alors toute forme fermée sur U est une forme exacte.*

Démonstration Soit $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$. Par hypothèse, l'ouvert U est étoilé, donc il existe $\mathbf{a} = (a_i) \in U$ tel que pour tout $x \in U$ on ait $[\mathbf{a}, x] \subset U$. Par conséquent la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : U \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \alpha_j (tx + (1-t)\mathbf{a}) \end{aligned}$$

est continue et, pour tous $(i, j) \in [1, n]^2$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} ((x_j - a_j) \alpha_j (tx + (1-t)\mathbf{a}))(x, t) \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial x_i} ((x_j - a_j) \alpha_j (tx + (1-t)\mathbf{a}))(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} ((x_i - a_i) \alpha_i (tx + (1-t)\mathbf{a}))(x, t) \\ &= \sum_{j \neq i} (x_j - a_j) t \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} (tx + (1-t)\mathbf{a}) + \alpha_i (tx + (1-t)\mathbf{a}) + (x_i - a_i) t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} (tx + (1-t)\mathbf{a}) \\ &= \alpha_i (tx + (1-t)\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) t \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} (tx + (1-t)\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'application

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t \alpha_i (tx + (1-t)\mathbf{a}) \end{aligned}$$

est différentiable et on a

$$g'(t) = \alpha_i (tx + (1-t)\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} (tx + (1-t)\mathbf{a})$$

Puisque ω est une forme fermée, on a $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$ pour tout i, j . Ainsi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t) = g'(t)$$

Introduisons alors la fonction $f(x) = \int_0^1 \varphi(x, t) dt$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t) dt \\ &= \int_0^1 g'(t) dt \\ &= g(1) - g(0) \\ &= \alpha_i(x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$df = \omega$$

□

On considère maintenant un ouvert élémentaire D de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

avec φ_1 et φ_2 sont de classes \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[a, b]$, ψ_1 et ψ_2 sont de classes \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[c, d]$.

Lemme 3 Soit $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions continues sur un ouvert \mathcal{U} contenant l'adhérence \overline{D} de D . Alors on a

$$\int_{\partial D} P(x, y)dx = \int_a^b (P(t, \varphi_1(t)) - P(t, \varphi_2(t)))dt$$

et

$$\int_{\partial D} Q(x, y)dy = \int_c^d (-Q(t, \psi_1(t)) + Q(t, \psi_2(t)))dt$$

Démonstration On paramètre ∂D à l'aide des quatres courbes suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2 : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (b, t) & t &\longmapsto (t, \varphi_2(t)) \\ \gamma_3 : [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_4 : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (a, t) & t &\longmapsto (t, \varphi_1(t)) \end{aligned}$$

Posons $\omega = P(x, y)dx$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \omega &= \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_4} \omega \\ &= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} P(b, t) \times 0dt - \int_a^b P(t, \varphi_2(t))dt - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} P(a, t) \times 0dt + \int_a^b P(t, \varphi_1(t))dt \\ &= \int_a^b P(t, \varphi_1(t))dt - \int_a^b P(t, \varphi_2(t))dt \end{aligned}$$

Cela prouve la première égalité.

Pour la deuxième égalité, on paramètre ∂D à l'aide des courbes suivantes :

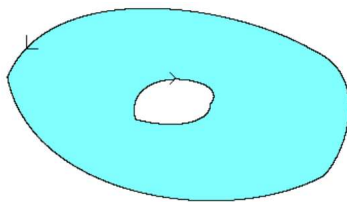
$$\begin{aligned} \gamma_1 : [\psi_1(c), \psi_2(c)] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2 : [c, d] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, c) & t &\longmapsto (\psi_2(t), t) \\ \gamma_3 : [\psi_1(d), \psi_2(d)] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_4 : [c, d] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, d) & t &\longmapsto (\psi_1(t), t) \end{aligned}$$

Posons $\omega_1 = Q(x, y)dy$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \omega_1 &= \int_{\gamma_1} \omega_1 + \int_{\gamma_2} \omega_1 - \int_{\gamma_3} \omega_1 - \int_{\gamma_4} \omega_1 \\ &= \int_{\psi_1(c)}^{\psi_2(c)} Q(t, c) \times 0dt + \int_c^d Q(\psi_2(t), t)dt - \int_{\psi_1(d)}^{\psi_2(d)} Q(t, d) \times 0dt - \int_c^d Q(\psi_1(t), t)dt \\ &= \int_c^d Q(\psi_2(t), t)dt - \int_c^d Q(\psi_1(t), t)dt \end{aligned}$$

Proposition 15 (Formule de Green-Riemann) Soit D un ouvert élémentaire de \mathbb{R}^2 , P et Q deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert contenant \overline{D} . On oriente ∂D la frontière de D de sorte que en parcourant la frontière dans le sens de l'orientation, D soit constamment sur la gauche. Alors on a

$$\int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$



Démonstration D'après le théorème de Fubini et le lemme 3 on a

$$\begin{aligned}
 \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy &= \int \int_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy - \int \int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy \\
 &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\
 &= \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy - \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx \\
 &= \int_{\partial D} Q(x, y) dy + \int_{\partial D} P(x, y) dx
 \end{aligned}$$

Exemple 22 *Calculons*

$$\int_{\partial D} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy,$$

où ∂D est le bord orienté du domaine délimité par les courbes d'équation $y = x^2$ et $x = y^2$.

— **Calcule direct :**

On a $\partial D = C_1 \cup C_2$ où C_i est paramétré par

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 t &\longmapsto (t, t^2)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 t &\longmapsto (t, \sqrt{t})
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{C_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{C_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\
 &= \int_0^1 (2t^3 - t^2 + 2t^2 + 2t^5) dt - \int_0^1 (2t\sqrt{t} - t^2 + \sqrt{t}) dt \\
 &= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} \\
 &= \frac{1}{30}
 \end{aligned}$$

— **En utilisant la formule de Green-Riemann**

Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

Alors $\partial D = C$. On pose

$$P(x, y) = 2xy - x^2 \quad \text{et} \quad Q(x, y) = x + y^2$$

On a, d'une part

$$\begin{aligned}\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy &= \int_D (1 - 2x) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy dx \\ &= \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \frac{1}{30}\end{aligned}$$

D'où

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

□