Sommaire

4 Déterminants

Sommaire

LES DÉTERMINANTS fournissent un critère théorique et pratique pour calculer le rang d'une matrice et résoudre certains systèmes linéaires. La construction rigoureuse des déterminants est assez abstraite. Dans ce chapitre, nous avons préféré exposer le côté concret, calculatoire et pratique des déterminants. Nous avons ainsi omis plusieurs démonstrations techniques.

4.1 Déterminant de n vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$. On note

$$E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$$

Un élément de E^n est donc une suite $(v_1, \ldots, v_n)$ de n vecteurs de E.
Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Nous commençons par la définition formelle suivante :

Définition 4.1.1. On considère une application

$$f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto f(v_1, \ldots, v_n)$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est une **forme n-linéaire**, c'est-à-dire f est linéaire par rapport à chaque variable v_i.
   Ceci signifie que pour tous vecteurs $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n$ de E, l'application

partielle $f_i : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $f_i(X) = f(v_1, \ldots, v_{i-1}, X, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ est linéaire. En d'autres termes :

$$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, \boxed{\alpha v_i + \beta w_i}, v_{i+1}, \ldots, v_n) =$$

$$\boxed{\alpha} f(v_1, \ldots, v_{i-1}, \boxed{v_i}, v_{i+1}, \ldots, v_n) + \boxed{\beta} f(v_1, \ldots, v_{i-1}, \boxed{w_i}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

pour tous vecteurs $v_1, \cdots, v_i, v_i, w_i, v_{i+1}, \cdots, v_n$ dans E et pour tous scalaires α, β dans $\mathbb{K}$.

2. f est **alternée** : pour tous vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ dans E et pour tous indices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i < j$:

$$f(v_1, \ldots, \boxed{v_i}, \ldots, \boxed{v_j}, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, \boxed{v_j}, \ldots, \boxed{v_i}, \ldots, v_n)$$

C'est-à-dire, f prend la valeur opposée si on permute deux vecteurs v_i et v_j. On dit aussi que f est **antisymétrique**.

3. $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

On démontre qu'une telle application existe et qui est unique, on la note $\texttt{det}_B$:

$$\texttt{det}_B : E^n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \texttt{det}_B(v_1, \ldots, v_n)$$

Le scalaire $\texttt{det}_B(v_1, \ldots, v_n)$ est appelé le **déterminant** de la suite $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E par rapport à la base B. Quand il n'y a pas de risque de confusion sur la base B choisie, on note simplement $\texttt{det}(v_1, \ldots, v_n)$.

Remarque 4.1.2. Voici des propriétés immédiates de la multilinéarité de l'application déterminant :

1. On sait que l'application partielle $f_i : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$f_i(X) = \texttt{det}(v_1, \ldots, v_{i-1}, X, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

est une application linéaire. D'autre part, rappelons que l'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul. D'où $f_i(0_E) = 0_{\mathbb{K}}$.
Par conséquent, si l'un des vecteurs v_i est nul, alors $\texttt{det}(v_1, \ldots, v_n)$ est nul :

$$\boxed{\texttt{det}(v_1, \ldots, 0_E, \ldots, v_n) = 0_{\mathbb{K}}}$$

Mais ceci peut être vérifié directement en écrivant :

$$\texttt{det}(v_1, \ldots, 0_E, \ldots, v_n) = \texttt{det}(v_1, \ldots, 0_{\mathbb{K}}.v_i, \ldots, v_n) = 0_{\mathbb{K}}\texttt{det}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0_{\mathbb{K}}$$

2.

$$\boxed{\begin{array}{c}\texttt{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i+w_i,v_{i+1},\ldots,v_n)=\\ \texttt{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n)+\texttt{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},w_i,v_{i+1},\ldots,v_n)\end{array}}$$

3.

$$\boxed{\texttt{det}(v_1,\ldots,\alpha v_i,\ldots,v_n)=\alpha\ \texttt{det}(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)}$$

pour tous vecteurs $v_1,\cdots,v_n \in E$ et pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$.
Cela signifie que " *Multiplier un seul des vecteurs par α multiplie le déterminant par α.*

4.

$$\boxed{\texttt{det}(\alpha_1 v_1,\alpha_2 v_2,\ldots,\alpha_n v_n)=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)\texttt{det}(v_1,v_2,\ldots,v_n)}$$

pour tous vecteurs $v_1,\cdots,v_n \in E$ et pour tous scalaires $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in \mathbb{K}$.

En effet, pour justifier cette formule, on applique successivement la linéarité par rapport à chacun des vecteurs $v_1,v_2,\ldots,v_n$:

$$\begin{array}{rcll}\texttt{det}(\alpha_1 v_1,\alpha_2 v_2,\ldots,\alpha_n v_n) & = & \alpha_1\texttt{det}(v_1,\alpha_2 v_2,\ldots,\alpha_n v_n) & \text{linéarité par rapport à } v_1\\ & = & \alpha_1\big(\alpha_2\texttt{det}(v_1,v_2,\ldots,\alpha_n v_n)\big) & \text{linéarité par rapport à } v_2\\ & = & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & = & (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)\texttt{det}(v_1,v_2,\ldots,v_n) & \end{array}$$

5. $$\boxed{\texttt{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},\sum_{k=1}^{p}\lambda_k w_k\ ,v_{i+1},\ldots,v_n)=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\texttt{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},w_k\ ,v_{i+1},\ldots,v_n)}$$

Il suffit d'appliquer la linéarité de l'application partielle $f_i : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $f_i(X)=\texttt{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},X,v_{i+1},\ldots,v_n)$, où $v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_n$ sont $n-1$ vecteurs fixés de E. ∎

Exemple 4.1.3. Pour $n=2$, l'application $\texttt{det} : E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Donc pour tous vecteurs v_1,w_1,v_2,w_2 dans E et pour tous scalaires $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ dans $\mathbb{K}$, la linéarité à gauche donne :

$$\texttt{det}(\alpha v_1+\beta w_1,\gamma v_2+\delta w_2)=\alpha\texttt{det}(v_1,\gamma v_2+\delta w_2)+\beta\texttt{det}(w_1,\gamma v_2+\delta w_2).$$

Or, la linéarité à droite implique :

$$\texttt{det}(v_1,\gamma v_2+\delta w_2)=\gamma\texttt{det}(v_1,v_2)+\delta\texttt{det}(v_1,w_2),$$

$$\texttt{det}(w_1,\gamma v_2+\delta w_2)=\gamma\texttt{det}(w_1,v_2)+\delta\texttt{det}(w_1,w_2)$$

Par conséquent,

$$\texttt{det}(\alpha v_1+\beta w_1,\gamma v_2+\delta w_2)=\alpha\gamma\texttt{det}(v_1,v_2)+\alpha\delta\texttt{det}(v_1,w_2)+\beta\gamma\texttt{det}(w_1,v_2)+\beta\delta\texttt{det}(w_1,w_2)$$

Remarque 4.1.4. L'application déterminant $\mathtt{det} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ n'est pas une application linéaire de l'espace vectoriel E^n dans $\mathbb{K}$, sauf si $n = 1$.
Effectivement, cela se vérifie par :

$$\mathtt{det}\,(\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n)) = \mathtt{det}(\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n) = \lambda^n \mathtt{det}(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq \lambda \mathtt{det}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$\mathtt{det}\,((v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n)) = \mathtt{det}(v_1{+}w_1, \ldots, v_n{+}w_n) \neq \mathtt{det}(v_1, \ldots, v_n){+}\mathtt{det}(w_1, \ldots, w_n)$$

Rappelons que l'application déterminant est alternée, c'est-à-dire que le déterminant prend la valeur opposée (se multiplie par -1) quand on échange deux vecteurs v_i et v_j, les autres étant inchangés :

$$\mathtt{det}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\mathtt{det}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

Voici une conséquence importante de cette propriété :

Proposition 4.1.5. *Soient $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n$ des vecteurs de E. S'il existe deux indices i et j $(i \neq j)$ tels que $v_i = v_j$, alors $\mathtt{det}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0_{\mathbb{K}}$. C'est-à-dire, `det` prend la valeur nulle si un vecteur se répète (au moins) deux fois :*

$$\boxed{\mathtt{det}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0_{\mathbb{K}}}$$

Démonstration. En permutant les deux vecteurs v_i et v_i qui se trouvent dans des places différentes, on obtient

$$\mathtt{det}(v_1, \ldots, \underline{v_i}, \ldots, \boxed{v_i}, \ldots, v_n) = -\mathtt{det}(v_1, \ldots, \boxed{v_i}, \ldots, \underline{v_i}, \ldots, v_n)$$

Il en découle que $\mathtt{det}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0_{\mathbb{K}}$. ■

Remarque 4.1.6. Pour $n = 3$, l'application $\mathtt{det} : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme trilinéaire alternée. Alors, pour tous vecteurs v_1, v_2, v_3 dans E :

$$\mathtt{det}(v_1, v_2, v_1) = \mathtt{det}(v_1, v_1, v_3) = \mathtt{det}(v_1, v_2, v_2) = 0_{\mathbb{K}}$$

car dans chaque cas, il y a un vecteur qui se répète.
D'un autre côté, la permutation de deux vecteurs permet d'écrire à titre d'exemple :

$$\begin{aligned}
\mathtt{det}(v_3, v_1, v_2) &= -\mathtt{det}(v_3, v_2, v_1) && \text{(en permutant } v_1 \text{ et } v_2) \\
&= -\left(-\mathtt{det}(v_1, v_2, v_3)\right) && \text{(en permutant } v_1 \text{ et } v_3) \\
&= +\mathtt{det}(v_1, v_2, v_3)
\end{aligned}$$

Théorème 4.1.7. *Soit $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de E. Si l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaire des autres : $v_i = \sum\limits_{k \neq i} \lambda_k v_k$, alors $\mathtt{det}(v_1, \ldots, v_n) = 0_{\mathbb{K}}$. Autrement dit, si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée, alors le déterminant est nul.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathtt{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},\boxed{v_i},v_{i+1},\ldots,v_n) &= \mathtt{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},\boxed{\sum_{k\neq i}\lambda_k v_k},v_{i+1},\ldots,v_n)\\ &= \sum_{k\neq i}\lambda_k\mathtt{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},\boxed{v_k},v_{i+1},\ldots,v_n)=0_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

car $\forall\ k\neq i,\ \mathtt{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},\boxed{v_k},v_{i+1},\ldots,v_n)=0_{\mathbb{K}}$ puisque v_k apparaît deux fois.

- Traitons le cas $n=3$ pour mieux assimiler le raisonnement précédent :

Soit donc v_1,v_2,v_3 trois vecteurs de E. On suppose par exemple que v_2 est combinaison linéaire de v_1 et v_3, à savoir $v_2=\lambda_1v_1+\lambda_3v_3$. Alors :

$$\mathtt{det}(v_1,v_2,v_3)=\mathtt{det}(v_1,\lambda_1v_1+\lambda_3v_3,v_3)=\lambda_1\mathtt{det}(v_1,v_1,v_3)+\lambda_3\mathtt{det}(v_1,v_3,v_3)=0_{\mathbb{K}}.$$

Corollaire 4.1.8 (Règle de calcul)**.** *On ne change pas la valeur prise par le déterminant sur un n-uplet $(v_1,\ldots,v_n)$ de E^n en ajoutant à l'un des vecteurs v_i une combinaison linéaire des autres vecteurs :*

$$\mathit{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},\boxed{v_i},v_{i+1},\ldots,v_n)=\mathit{det}(v_1,\ldots,v_{i-1},\boxed{v_i+\sum_{k\neq i}\lambda_kv_k},v_{i+1},\ldots,v_n)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathtt{det}(v_1,\ldots,v_i+\sum_{k\neq i}\lambda_kv_k,\ldots,v_n) &= \mathtt{det}(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)+f(v_1,\ldots,\sum_{k\neq i}\lambda_kv_k,\ldots,v_n)\\ &= \mathtt{det}(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n),\end{aligned}$$

parce que $\mathtt{det}(v_1,\ldots,\sum_{k\neq i}\lambda_kv_k,\ldots,v_n)=0_{\mathbb{K}}$ en vertu du théorème précédent. ■

Déterminant d'ordre $n=2$:

Soient E un espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ une base de E. Pour tous vecteurs $x=x_1e_1+x_2e_2$ et $y=y_1e_1+y_2e_2$ de E, calculons $\mathtt{det}(x,y)$:
Comme `det` est bilinéaire, nous avons :

$$\mathtt{det}(x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2)=x_1\mathtt{det}(e_1,y_1e_1+y_2e_2)+x_2\mathtt{det}(e_2,y_1e_1+y_2e_2)$$

Or,

$$\mathtt{det}(e_1,y_1e_1+y_2e_2)=y_1\mathtt{det}(e_1,e_1)+y_2\mathtt{det}(e_1,e_2)$$

$$\mathtt{det}(e_2,y_1e_1+y_2e_2)=y_1\mathtt{det}(e_2,e_1)+y_2\mathtt{det}(e_2,e_2)$$

D'où

$$\begin{aligned}&\mathtt{det}(x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2)\\ &=x_1y_1\mathtt{det}(e_1,e_1)+x_1y_2\mathtt{det}(e_1,e_2)+x_2y_1\mathtt{det}(e_2,e_1)+x_2y_2\mathtt{det}(e_2,e_2)\end{aligned}$$

De plus, puisque det est alternée, nous avons

$$\texttt{det}(e_1, e_1) = 0, \ \ \texttt{det}(e_2, e_2) = 0, \ \ \texttt{det}(e_1, e_2) = 1, \ \ \texttt{det}(e_2, e_1) = -\texttt{det}(e_1, e_2) = -1$$

On parvient ainsi à la formule bien connue en calcul vectoriel :

$$\boxed{\texttt{det}(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) = x_1y_2 - x_2y_1}$$

Déterminant d'ordre $n = 3$:

Envisageons le cas d'un espace vectoriel E de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Puisque det est une application trilinéaire alternée sur E, on obtient, de manière analogue en ne notant que les termes non nuls :

$$\begin{aligned}\texttt{det}(x, y, z) &= x_1y_2z_3\texttt{det}(e_1, e_2, e_3) + x_1y_3z_2\texttt{det}(e_1, e_3, e_2) + x_2y_1z_3\texttt{det}(e_2, e_1, e_3) \\ &\quad + x_2y_3z_1\texttt{det}(e_2, e_3, e_1) + x_3y_1z_2\texttt{det}(e_3, e_1, e_2) + x_3y_2z_1\texttt{det}(e_3, e_2, e_1) \\ &= \big((x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2) - (x_3y_2z_1 + x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3)\big)\texttt{det}(e_1, e_2, e_3)\end{aligned}$$

Comme $\texttt{det}(e_1, e_2, e_3) = 1$, on déduit le déterminant des trois vecteurs x, y et z dans la base $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\begin{aligned}&\texttt{det}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3,\ z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3) = \\ &\qquad x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2) - (x_3y_2z_1 + x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3)\end{aligned}}$$

Pour n quelconque, l'expression du déterminant dans le cas général est un peu plus délicate à établir. En effet, si nous tentons de répéter les arguments précédents pour calculer le déterminant de n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ en dimension n, nous nous apercevons très vite que cette méthode est lourde, surtout si la dimension n est assez grande. Essayer de faire les calculs pour $n = 4$ pour vous convaincre. Par conséquent, nous proposerons plus loin une approche différente qui va être basée sur un procédé de récurrence.

Pour la disposition pratique du déterminant, et afin de calculer concrètement le scalaire $\texttt{det}(v_1, \ldots, v_n)$ pour des vecteurs donnés $v_1, \ldots, v_n$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de base $B = (e_1, \ldots, e_n)$, on écrit en colonnes les coordonnées de chacun de ces vecteurs dans la base B :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix},$$

où $v_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_i, v_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}e_i, \ldots, v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in}e_i$, puis on rassemble ces colonnes entre traits verticaux pour représenter le déterminant à calculer :

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ainsi, à titre d'exemples, les déterminants d'ordre 2 et 3 que nous avons développés tout à l'heure peuvent s'écrire sous forme :

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2) - (x_3y_2z_1 + x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3)}$$

Soulignons que la dernière formule pour le déterminant d'ordre 3 s'appelle la **règle de Sarrus** ; elle est valable seulement pour $n = 3$.

La notation précédente du déterminant de n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nous conduit de façon naturelle à la notion de déterminant d'une matrice carrée.

4.2 Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n à cœfficients dans $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Désignons par $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de A ; ce sont des vecteurs de l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \; C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire : $A = (a_{ij}) = (C_1,\ C_2,\ \dots, C_n)$. Choisissons pour base de $\mathbb{K}^n$ la base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le scalaire a_{ij} s'interprète comme la composante du vecteur C_j suivant e_i relativement à la base B.

Définition 4.2.1. *On appelle* ***déterminant de la matrice carrée*** $A = (a_{ij})$*, et l'on note* $\mathtt{det}A$*, le déterminant* $\mathtt{det}(C_1, \dots, C_n)$ *de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique* B *de* $\mathbb{K}^n$ *:*

$$\mathtt{det}(A) = \mathtt{det}(C_1, \dots, C_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemple 4.2.2. La matrice unité I_n d'ordre n a pour vecteurs colonnes $e_1, \dots, e_n$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (e_1,\ e_2,\ \dots, e_n).$$

Or, la condition 3 de la définition 4.1.1 nous dit que $\mathtt{det}(e_1, \dots, e_n) = 1$. Il vient :

$$\boxed{\mathtt{det}(I_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1}$$

Remarque 4.2.3. Les colonnes d'une matrice carrée forment n vecteurs et nous voyons donc qu'un déterminant det sur l'espace vectoriel $E = K^n$ induit une application $\mathtt{det} : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\mathtt{det}(A) = det(C_1, \dots, C_n)$ où C_i est la i-ème colonne de A. Le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dit **déterminant d'ordre** n.

Nous avons déjà montré que le déterminant d'une famille liée de vecteurs est nul. En fait, on admet que la réciproque est également vraie, c'est-à-dire si le déterminant d'une famille $(v_1, \dots, v_n)$ est nul, alors cette famille est liée. Nous récapitulons donc ce résultat ainsi que sa contraposée comme suit :

Théorème 4.2.4. *Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n et soit B une base de E. On a :*

- $(v_1, \dots, v_n)$ *est liée* $\iff \mathtt{det}(v_1, \dots, v_n) = 0$
- $(v_1, \dots, v_n)$ *est libre* $\iff \mathtt{det}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$

On sait que dans un espace vectoriel E de dimension n, une famille $(v_1, \dots, v_n)$ à n vecteurs est une base de E si et seulement si elle est libre. Le théorème précédent donne ainsi une caractérisation des bases à l'aide du déterminant :

> Dans un espace vectoriel E de dimension n :
> $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E $\iff \mathtt{det}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$

Exemple 4.2.5. Soient $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $E = \mathbb{K}^2$. On a :

$$(v_1,\ v_2) \text{ est liée } \iff \mathtt{det}(v_1,\ v_2) = 0 \iff \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \iff ab' - a'b = 0.$$

Exemple 4.2.6. Soient $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $E = \mathbb{K}^3$. On a :

$$(v_1,\ v_2,\ v_3) \text{ est liée } \iff \mathtt{det}(v_1,\ v_2,\ v_3) = 0 \iff \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Voici maintenant des propriétés importantes du déterminant d'une matrice :

Théorème 4.2.7. *Si n est un entier positif, on a*

1. $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \mathtt{det}(\lambda A) = \lambda^n \mathtt{det}(A)$;
2. $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathtt{det}(AB) = \mathtt{det}(A) \times \mathtt{det}(B)$;
3. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible* $\iff \mathtt{det}(A) \neq 0$;
4. *Si matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors* $\mathtt{det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\mathtt{det}(A)}$.

Démonstration.

1. En notant $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A, on a $A = (C_1\ C_2\ \dots\ C_n)$, donc $\mathtt{det}(A) = \mathtt{det}(C_1, \dots, C_n)$. D'autre part, lorsqu'on multiplie la matrice A par le scalaire λ, on voit que les vecteurs colonnes de A sont multipliées par λ, c'est-à-dire $\lambda A = (\lambda C_1,\ \lambda C_2,\ \dots,\ \lambda C_n)$. Il en résulte que
   $\mathtt{det}(\lambda A) = \mathtt{det}(\lambda C_1,\ \lambda C_2,\ \dots,\ \lambda C_n) = \lambda^n \mathtt{det}(C_1,\ C_2,\ \dots,\ \lambda C_n) = \lambda^n \mathtt{det}(A)$.

2. Cette propriété est admise.

3. Soit $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de A. D'après le chapitre des matrices, nous savons que A est inversible $\iff$ $(C_1, \ldots, C_n)$ est une famille libre dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$. Mais le théorème précédent nous dit que $(C_1, \ldots, C_n)$ est libre $\iff$ $\mathtt{det}(C_1, \ldots, C_n) \neq 0$. Or, $\mathtt{det}(A) = \mathtt{det}(C_1, \ldots, C_n)$, d'où le résultat.

4. Puisque $A \times A^{-1} = I_n$, alors $\mathtt{det}\left(A \times A^{-1}\right) = \mathtt{det}(I_n)$. Or, nous avons déjà vu que $\mathtt{det}(I_n) = 1$. En outre, la propriété 2 ci-dessus donne $\mathtt{det}\left(A \times A^{-1}\right) = \mathtt{det}(A) \times \mathtt{det}\left(A^{-1}\right)$. D'où le résultat voulu. ■

Proposition 4.2.8. *Deux matrices semblables ont le même déterminant :*

$$\boxed{\mathtt{det}(P^{-1}AP) = \det(A)}$$

Démonstration. Si A et B sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$ et donc $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A$ car $\det(P^{-1}) = (\det P)^{-1}$. ■

L'application déterminant $\mathtt{det} : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathbb{K}$ n'est pas linéaire :

$$\mathtt{det}(A+B) \neq \mathtt{det}(A) + \mathtt{det}(B), \; \mathtt{det}(\lambda A) \neq \lambda \mathtt{det}(A).$$

Il suffit de considérer l'exemple :

$$\mathtt{det}(I_n + I_n) = \mathtt{det}(2I_n) = 2^n \mathtt{det}(I_n) = 2^n \neq \mathtt{det}(I_n) + \mathtt{det}(I_n) = 1 + 1 = 2.$$

D'après la section précédente, nous savons déjà calculer les déterminants d'ordres 2 et 3. Nous verrons ultérieurement comment calculer le déterminant d'ordre n quelconque. Mais tout d'abord, rappelons que la transposée ${}^tA$ d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n est la matrice carrée d'ordre n définie par ${}^tA = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ji}$. Concrètement, la matrice ${}^tA$ s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de A, c'est-à-dire les lignes de A deviennent les colonnes de ${}^tA$ (et les colonnes de A deviennent les lignes de ${}^tA$).
Comparons à présent les déterminants d'une matrice A et de sa transposée ${}^tA$ pour $n = 2$ et $n = 3$. Il est clair que si $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. Donc

$$\mathtt{det}({}^tA) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2 = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \mathtt{det}(A).$$

De même, on vérifie aisément ce résultat pour $n = 3$, car si $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$. Donc la règle de Sarrus appliquée à la matrice ${}^tA$ donne

$$\texttt{det}({}^tA) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3) - (z_1y_2x_3 + x_1z_2y_3 + y_1x_2z_3)$$

En comparant les expressions de $\texttt{det}({}^tA)$ et $\texttt{det}(A)$, on voit que $\texttt{det}({}^tA) = \texttt{det}(A)$. Plus généralement, nous admettons ce résultat pour n quelconque, et nous énonçons donc sans démonstration le théorème très important suivant :

Théorème 4.2.9. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et sa transposée ${}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même déterminant :*

$$\boxed{\texttt{det}(A) = \texttt{det}({}^tA)}$$

Ce théorème nous dit qu'on peut échanger les lignes et les colonnes d'une matrice carrée A sans changer son déterminant. Plus précisément, notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A. Par définition, $\texttt{det}(A) = \texttt{det}(C_1, \dots, C_n)$. Mais les lignes $L_1, \dots, L_n$ de A sont les colonnes de ${}^tA$, donc la définition du déterminant de la matrice $\texttt{det}({}^tA)$ s'écrit $\texttt{det}({}^tA) = \texttt{det}(L_1, \dots, L_n)$. Par conséquent, $\texttt{det}(A) = \texttt{det}(C_1, \dots, C_n) = \texttt{det}(L_1, \dots, L_n)$. Ainsi, toute règle de calcul du déterminant relatif aux colonnes se transpose immédiatement aux lignes, et vice-versa.

Remarque 4.2.10. Soit A une matrice carrée d'ordre n de colonnes $C_1, \dots, C_n$ et de lignes $L_1, \dots, L_n$. Nous avons vu que

$$\texttt{det}(A) = 0 \iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est liée.}$$

En passant à la transposée, et en se rappelant que $\texttt{det}(A) = \texttt{det}({}^tA)$ et que les colonnes de ${}^tA$ sont les lignes de A, on obtient :

$$\texttt{det}(A) = 0 \iff \det({}^tA) = 0 \iff (L_1, \dots, L_n) \text{ est liée.}$$

4.2.1 Règles de calcul du déterminant d'une matrice

Le déterminant d'une matrice carrée est une application n-linéaire alternée des *vecteurs colonnes*, et donc

- si on échange deux colonnes d'une matrice, le déterminant se change en son opposé;
- le déterminant d'une matrice dépend linéairement de chacun de ses vecteurs colonnes;

- on ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice en ajoutant à l'un de ses vecteurs colonnes, une combinaison linéaire des *autres* vecteurs colonnes;

- Si l'un des vecteurs colonnes est nul, alors le déterminant de la matrice est nul;

- Si l'un des vecteurs colonnes est combinaison linéaire des autres vecteurs colonnes, alors le déterminant de la matrice est nul.

Puisque le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée, on peut remplacer « **vecteur colonne** » par « **vecteur ligne** » dans les propriétés précédentes. Plus spécifiquement :

- si on échange deux lignes d'une matrice, le déterminant se change en son opposé;

- le déterminant d'une matrice dépend linéairement de chacun de ses vecteurs lignes;

- on ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice en ajoutant à l'un de ses vecteurs lignes, une combinaison linéaire des *autres* vecteurs lignes;

- Si l'un des vecteurs lignes est nul, alors le déterminant de la matrice est nul;

- Si l'un des vecteurs lignes est combinaison linéaire des autres vecteurs lignes, alors le déterminant de la matrice est nul.

Exemple 4.2.11. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ses trois vecteurs lignes $L_1 = \begin{pmatrix}3, -1, 2\end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix}2, -1, 1\end{pmatrix}$, $L_3 = \begin{pmatrix}1, 0, 1\end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants : $L_1 - L_2 = L_3$. Par conséquent, $\texttt{det}(A) = 0$ et la matrice A n'est pas inversible. On en déduit automatiquement (sans faire les calculs!) que les trois vecteurs colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants. Justement, une simple observation montre que $C_1 + C_2 = C_3$.

Exemple 4.2.12. De même, $\begin{vmatrix} 1 & t & 5 & 2 \\ -1 & 0 & \alpha & -2 \\ 2 & \beta & 34 & 4 \\ -7 & 3 & \gamma & -14 \end{vmatrix} = 0$, puisque les première et quatrième colonnes sont proportionnelles : $C_4 = 2C_1$.

4.3 Développement d'un déterminant suivant une rangée

Nous avons déjà obtenu des formules précises pour les déterminants d'ordres 2 et 3. Notre objectif dans cette section est d'expliciter le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n par une relation de récurrence en supposant connue l'expression du déterminant d'ordre $n-1$.
On appelle *rangée* d'une matrice ou d'un déterminant toute ligne ou colonne de cette matrice ou de ce déterminant.

4.3.1 Mise en place

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. Pour tout couple (i, j) d'indices avec $1 \leq i, j \leq n$, on note A_{ij} la matrice d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

Exemple 4.3.1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, alors on a par exemples

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \; A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \; A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \; A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ceci étant défini, nous énonçons sans démonstration le résultat important suivant :

Théorème 4.3.2. *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a*

$$\boxed{\mathtt{det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \mathtt{det}(A_{ij})}$$

Cette formule s'appelle le ***développement du déterminant par rapport à la colonne*** *j.*

Puisque chaque terme $\mathtt{det}(A_{ij})$ est un déterminant d'ordre $n-1$, la relation précédente est une formule récurrente.

D'autre part, on sait que la colonne i de la matrice ${}^tA$ est égale à la ligne i de la matrice A. Donc si on développe le déterminant de la transposée $\mathtt{det}({}^tA)$ par rapport à la colonne i dans la formule précédente, on obtient, puisque $\texttt{det}({}^tA) = \texttt{det}(A)$, une formule analogue qui va donner cette fois-ci le développement de $\texttt{det}(A)$ par rapport à la ligne i :

Théorème 4.3.3. *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute ligne $i \in \{1, \dots, n\}$, on a*

$$\boxed{\texttt{det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \texttt{det}(A_{ij})}$$

*Cette formule s'appelle le **développement du déterminant par rapport à la ligne** i.*

Attention : ici, c'est l'indice i qui est fixé et j varie, contrairement au théorème précédent.

- Il est important de noter qu'on peut **choisir** sa ligne i ou sa colonne j pour effectuer le calcul du déterminant.
- On remarque qu'on a $(-1)^{i+j}$ dans la ligne i et la colonne j.
- On développe le développement par rapport à une ligne ou une colonne en tenant compte de la règle des signes $(-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \texttt{det}(A_{ij})$.
- La règle des signes est donc : $\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & + & \cdots & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & & \cdots & & - & + \end{pmatrix}$

(*Attention : commencer par un signe + en haut à gauche ou en bas à droite.*)

Pour les étudiants amateurs du jeu d'échecs, vous pouvez observer l'analogie entre la règle des signes et le tableau de l'échiquier.

Les considérations précédentes motivent la définition suivante :

Définition 4.3.4. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$. On appelle*

- **mineur** *relatif à l'élément a_{ij}, le déterminant de la matrice carrée A_{ij} d'ordre $(n-1)$ déduite de A par la suppression de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne;*
- **cofacteur** *de a_{ij}, le scalaire $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$.*

Exemple 4.3.5. Il est clair que si $A = (a)$ est une matrice d'ordre 1, alors $\texttt{det}(A) = a$. Nous savons que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Nous pouvons retrouver ce résultat en développant ce déterminant par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} c\ \texttt{det}(b) + (-1)^{2+2} d\ \texttt{det}(d) = -bc + ad.$$

Exemple 4.3.6. Calculons le déterminant d'ordre 3 suivant en le développant par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

On retrouve ainsi l'expression du déterminant d'ordre 3 déjà obtenu par la règle de Sarrus.

Exemple 4.3.7. Calculons le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ suivant la colonne 2 :

$$\texttt{det}(A) = -3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = ((-3) \times 1) + (4 \times 0) - (1 \times (-1)) = -2$$

Remarque 4.3.8. On s'aperçoit très vite que cette méthode est longue, surtout si la taille n de la matrice augmente, car on doit calculer n déterminants d'ordres $n-1$. Par contre, cette méthode est très pratique quand une ligne ou une colonne contient beaucoup de zéros.

Dans la pratique, on choisit une ligne ou une colonne qui contient beaucoup de zéros si possible pour minimiser les calculs.

L'exemple qui suit illustre ce point.

Exemple 4.3.9. Calculons le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Or, il est convenable ici de développer suivant la colonne 3 qui contient trois termes nuls :

$$\texttt{det}(A) = +0 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 8 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

L'avantage de ce développement est qu'on est amené à calculer un seul déterminant d'ordre 3 :

$$\texttt{det}(A) = 8\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

D'après l'exemple précédent, nous obtenons $\texttt{det}(A) = 8 \times (-2) = -16$.

En connexion avec la remarque ci-dessus, le calcul du déterminant des matrices diagonales ou triangulaires se prête très bien au développement par rapport à une ligne ou à une colonne grâce au grand nombre de zéros contenus dans ces matrices.

Théorème 4.3.10. *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des terme diagonaux :*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Démonstration. Raisonnement par récurrence sur n :

- La formule est vraie pour $n = 2$ puisque $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$.

- Supposons la formule vraie pour toute matrice triangulaire supérieure d'ordre $n-1$ et soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure d'ordre n.
Il est facile de voir que la première colonne et la dernière ligne contiennent beaucoup de zéros, donc il convient de développer par rapport à l'une de ces deux rangées. Par exemple, développons le déterminant de A par rapport à la dernière ligne :

$$\texttt{det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = +a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{n-1\,n-1}$, car c'est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure d'ordre $n-1$. D'où le résultat. ■

- Dans la récurrence précédente, on peut développer par rapport à la première colonne, qui contient elle aussi beaucoup de zéros, pour aboutir à la même conclusion.

- En transposant, on obtient que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est aussi égal au produit des terme diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

• Les matrices diagonales étant des matrices à la fois triangulaires supérieures et inférieures, leur déterminant est égal aussi au produit des termes diagonaux :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$$

• En particulier, on retrouve la formule du déterminant d'une matrice scalaire $\texttt{det}(\lambda I_n) = \lambda^n$, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$.

Exemple 4.3.11. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degrés $\leq n$. On sait que $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et que $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$. On remarque les polynômes $1, X, X^2, \dots, X^n$ ont pour degrés $0, 1, \dots, n$ respectivement. Plus généralement, soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$. On dit que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une **famille échelonnée de polynômes** si $\deg(P_k) = k$ pour tout $\in \{0, 1, \dots, n\}$. Montrons que toute famille échelonnée de polynômes $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Pour cela, posons $P_k = a_{0k} + a_{1k}X + \dots + a_{kk}X^k$, avec $a_{kk} \neq 0$. Pour montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, il suffit de prouver que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre, ce qui revient à établir que $\texttt{det}(P_0, P_1, \dots, P_n) \neq 0$. Justement, le fait que ce déterminant soit triangulaire facilite beaucoup les calculs :

$$\texttt{det}(P_0, P_1, \dots, P_n) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{00}a_{11}\dots a_{nn} \neq 0$$

En particulier, la famille $\left(1, \dfrac{X-a}{1!}, \dfrac{(X-a)^2}{2!}, \dots, \dfrac{(X-a)^n}{n!}\right)$, où $a \in \mathbb{K}$, forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$, puisque c'est une famille échelonnée de polynômes. Cette base est utilisée notamment dans la formule de Taylor pour les polynômes.

4.3.2 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Nous allons étudier ici le déterminant d'une matrice partagée en sous-matrices.

- Commençons par observer que, pour toute matrice carrée A d'ordre m et toute matrice C de type (m, n), on a la formule :

$$\left|\begin{array}{c|c} I_n & O \\ \hline C & A \end{array}\right| = det(A)$$

C'est-à-dire

$$\left|\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{array}\right|$$

En effet, il suffit d'effectuer des développements successifs par rapport aux premières lignes, qui sont les plus simples : il ne reste plus à la fin que le déterminant de A.

- De même, en développant le déterminant suivant la dernière ligne plusieurs fois de suite, on obtient

$$\left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & I_n \end{array}\right| = det(A)$$

- Soient maintenant A et B des matrices carrées d'ordres respectifs m et n et C une matrice de type (m, n). On remarque aisément le produit matriciel par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_m & O \\ \hline O & B \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & I_n \end{array}\right)$$

Selon la formule $\texttt{det}(M \times N) = \texttt{det}(M) \times \texttt{det}(N)$, il s'ensuit que

$$\left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} I_m & O \\ \hline O & B \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & I_n \end{array}\right|$$

Finalement, en tenant compte de ce qui précède, on déduit la formule suivante, très pratique aussi bien en calculs qu'en théorie des déterminants :

$$\boxed{\left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right| = det(A)det(B)}$$

Exemple 4.3.12. Le déterminant $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 & -1 & 4 \\ 3 & -9 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ vaut

$$\left|\begin{array}{cc|ccc} -2 & 1 & 7 & -1 & 4 \\ 3 & -9 & 2 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (15) \times (-105) = -1575.$$

On notera cependant que si A, B, C et D sont des matrices carrées du même ordre, en général on a :

$$\left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline D & B \end{array}\right| \neq det(A)det(B) - det(D)det(C)$$

4.3.3 Inverse d'une matrice carrée

Définition 4.3.13. *Si $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$, on appelle* ***comatrice*** *(ou* ***matrice des cofacteurs****) de A, et on note $ComA$, la matrice de terme général c_{ij}, égal au cofacteur $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ relatif à a_{ij} :*

$$\boxed{ComA = \left(c_{ij}\right)_{ij} = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij}\right)_{ij}}$$

Exemple 4.3.14. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Puisque $A_{11} = d,\ A_{12} = b,\ A_{21} = c,\ A_{22} = a$, alors la comatrice de A est la matrice

$$ComA = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{1+2} A_{12} \\ (-1)^{2+1} A_{21} & (-1)^{2+2} A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} d & (-1)^{1+2} b \\ (-1)^{2+1} c & (-1)^{2+2} a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple 4.3.15. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Sa comatrice est

$$ComA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

En fait, c'est plutôt la transposée ${}^t(ComA)$ de la comatrice de A qui a beaucoup d'importance vis-à-vis de la matrice A, comme le montre le résultat ci-dessous :

Théorème 4.3.16. *Pour toute matrice carrée A d'ordre $n \geq 2$, on a*

$$\boxed{A \times {}^t(ComA) = {}^t(ComA) \times A = (\det A)I_n}$$

Par conséquent, si A est inversible, on peut déduire la formule théorique de A^{-1} :

Corollaire 4.3.17 (Inverse d'une matrice carrée)**.** *Si A est une matrice carrée inversible d'ordre $n \geq 2$, on a*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\mathtt{det} A}\, {}^t(ComA)}$$

⚠ Cette jolie formule conduit à des calculs pénibles ! Exceptés les cas $n = 2$ et $n = 3$, cette formule ne peut servir au calcul numérique de l'inverse car elle comporte trop d'opérations.

Exemple 4.3.18. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Si $\mathtt{det}(A) = ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et la formule précédente fournit :

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathtt{det} A}\, {}^t(ComA) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple 4.3.19. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ traitée dans l'exemple (4.3.15). Il n'est pas difficile de montrer que $\mathtt{det}(A) = -1 \neq 0$, et donc A inversible. Puisque sa comatrice est

$$ComA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$${}^t(ComA) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathtt{det} A}\, {}^t(ComA) = - \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

⚠ Comme d'habitude, pour s'assurer qu'il n'y a pas d'erreurs dans le résultat de A^{-1}, vérifier toujours par le calcul qu'on a bien l'égalité $A \times A^{-1} = I_n$!!!

4.4 Déterminant et rang

Les déterminants peuvent servir à calculer le rang d'une matrice de taille quelconque : le point est que l'on peut extraire d'une matrice des matrices carrées en ne gardant que les coefficients correspondant à certaines lignes et colonnes.

Définition 4.4.1. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (n, p) et $k \in \mathbb{N}$ un entier tel que $k \leq n$ et $k \leq p$. On appelle **déterminant d'ordre** k **extrait** de A, le déterminant d'une matrice carrée d'ordre k obtenue en supprimant $n - k)$ lignes et $p - k$ colonnes de A.

Exemple 4.4.2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. Les déterminants extraits de A sont :

- Les déterminants d'ordre $k = 1$ qui sont les cœfficients de A : a, b, c, a', b', c'. Ils sont obtenus en supprimant $2 - 1 = 1$ ligne et $3 - 1 = 2$ colonnes de la matrice A.

- Les déterminants extraits d'ordre $k = 2$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

  Ils sont obtenus en supprimant $2 - 2 = 0$ ligne (c'est-à-dire on ne supprime aucune ligne) et $3 - 2 = 1$ colonne de A.

- Il n'y a pas de déterminants d'ordre $k = 3$ extraits de A.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.4.3 (Caractérisation du rang d'une matrice)**.** *Le rang d'une matrice* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est égal à l'ordre maximal des déterminants non nuls extraits de* A*.*

En d'autres termes, le rang d'une matrice A est le plus grand entier r pour lequel il existe un déterminant non nul d'ordre r extrait de A.

Exemple 4.4.4. Calculons le rang de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & -2 & -8 \\ 0 & 5 & 20 \end{pmatrix}$. Il faut commencer par considérer les déterminants extraits de A de plus grand ordre k. Le plus grand ordre possible k est 3 car le déterminant de A peut être considérée comme extrait de A en supprimant 0 lignes et 0 colonnes.
En regardant les colonnes, on a $C_3 = 4C_2$. Donc la matrice A n'est pas inversible, d'où $\det(A) = 0$, ce qui donne $rang(A) < 3$.
Donc il n'existe pas de déterminant d'ordre 3 extrait de A qui soit non nul.

Cherchons maintenant s'il existe un déterminant non nul d'ordre $k = 2$ extrait de A. Il suffit de prendre par exemple

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0$$

qui est obtenu en supprimant la ligne 3 et la colonne 3. Ainsi, $rang(A) = 2$.
Notons qu'un déterminant non nul extrait de A d'ordre maximal n'est pas unique. Dans notre exemple, on peut prendre aussi un autre déterminant non nul extrait d'ordre maximal 2 :

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

qui est obtenu en supprimant la première ligne et la troisième colonne.

D'autre part, rappelons que pour n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ dans un espace vectoriel de dimension n muni d'une base B, on a

$$(v_1, \ldots, v_n) \text{ est libre } \iff \mathtt{det}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$$

Que peut-on dire lorsqu'on a une famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_p)$ de cardinal $p < n$? Si $p > n$, alors évidemment $(v_1, \ldots, v_p)$ est liée. Le cas $p < n$ est traité ci-après. Soulignons que p vecteurs en dimension n forment une matrice A de type (n, p) contenant les coordonnées de $v_1, \ldots, v_p$ dans la base B.

Corollaire 4.4.5 (Caractérisation des familles libres)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E avec $p < n$. Alors $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre si et seulement si on peut extraire de $(v_1, \ldots, v_p)$ un déterminant d'ordre p non nul.*

Démonstration. D'après le premier chapitre, on sait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre si et seulement si $rang(v_1, \ldots, v_p) = p$. Mais selon le théorème précédent, cette condition est équivalente à l'existence d'un déterminant extrait d'ordre p non nul. ■

Exemple 4.4.6. Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Ces trois vecteurs appartiennent à l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$.
Formons la matrice A des coordonnées de v_1, v_2, v_3 dans la base canonique B de $\mathbb{K}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K}).$$

Il n'y a pas de déterminant d'ordre $k = 4$ extrait de A.
On peut choisir un déterminant d'ordre $k = 3$ extrait de A non nul : par exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-1) = -1 \neq 0 \text{ (déterminant d'une matrice triangulaire)}$$

D'où $rang(v_1, v_2, v_3) = 3$ et, par suite, (v_1, v_2, v_3) est libre.

Exemple 4.4.7. Soient $E = \mathbb{K}^3$ et $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de E. A l'aide des déterminants extraits, on a

$$(v_1, v_2) \text{ est libre} \iff \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(v_1, v_2) \text{ est liée} \iff \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$$

4.5 Un exemple de déterminant à l'aide des règles de calculs

On va utiliser les règles de calcul du déterminant qu'on a déjà vues précédemment pour calculer le déterminant d'ordre 4 ci-après. Notons qu'il y a plusieurs de choix pour aborder ce calcul, c'est-à-dire qu'on peut choisir convenablement les vecteurs lignes ou les vecteurs colonnes sur lesquels on va travailler :

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 11 & 5 \\ 7 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 1 \\ 7 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = D_2$$ en ajoutant -2 fois la deuxième colonne à la quatrième colonne ($C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2$).

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 1 \\ 7 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 7 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = D_3$$ en développant selon la quatrième colonne.

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 7 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = D_4$$ en ajoutant la seconde colonne à la troisième colonne.

$D_4 = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ en développant suivant la ligne 3.

$D_4 = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ en factorisant la seconde colonne par 2.

Enfin, $D_1 = D_4 = 2(-1-7) = -16$.

Entraînez-vous bien chez-vous en reprenant le même déterminant pour retrouver le même résultat en effectuant d'autres opérations sur les lignes ou les colonnes.

4.6 Systèmes linéaires

4.6.1 Position du problème

Dans cette section, n et p sont deux entiers non nuls et $\mathbb{K}$ désigne toujours le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle **système linéaire** de p équations à n inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$, un ensemble d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 & (L_2) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{p1}x_1 & +a_{p2}x_2 & + & \cdots & +a_{pn}x_n & = & b_p & (L_p) \end{array}\right. \tag{4.1}$$

dans lequel les coefficients a_{ij} et les b_i sont des scalaires de $\mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n$ sont les **inconnues** qui appartiennent aussi à $\mathbb{K}$. Les éléments $b_1, \dots, b_p$ sont appelés les seconds membres. Les p équations sont notées $L_1, \dots, L_p$ et s'appellent aussi les lignes du système.

Le système (4.1) s'écrit en abrégé

$$\sum_{j=1} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, 2, \dots, p.$$

On appelle **solution** du système tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ vérifiant les équations $L_1, \dots, L_p$. **Résoudre** le système c'est trouver toutes les solutions.
On dit qu'un système linéaire est **compatible** s'il possède au moins une solution $(x_1, \dots, x_n)$. Il est dit **incompatible** (ou *impossible*) lorsqu'il n' a aucune solution.

Il y a trois interprétations d'un système linéaire :

Interprétation vectorielle :
Soient les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. Considérons les vecteurs colonnes

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p, \qquad \text{et } A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$$

Le système (4.1) s'écrit alors sous-forme vectorielle

$$x_1A_1 + \cdots + x_nA_n = B \tag{4.2}$$

Le problème posé est d'écrire le vecteur B comme combinaison linéaire des vecteurs $A_1, \dots, A_n$ et de calculer les scalaires $x_1, \dots, x_n$ correspondants.

Interprétation matricielle :
Soit A la matrice de type (p, n) formée des coefficients a_{ij} du système, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

A s'appelle la **matrice su système**. Les vecteurs colonnes de la matrice A sont les vecteurs colonnes $A_1, \dots, A_n$ utilisés dans la représentation vectorielle (4.2). Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. A l'aide de la multiplication des matrices, le système (4.1) devient alors

$$AX = B \tag{4.3}$$

Résoudre le système (4.1) revient à chercher les matrices uni-colonnes $X \in \mathbb{K}^n$ vérifiant l'équation matricielle $AX = B$.

Interprétation fonctionnelle :
Soient $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ l'application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ est la matrice $A = (a_{ij})$ utilisée dans l'interprétation matricielle (4.3).
Or, l'écriture matricielle d'une application linéaire dit que pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, son image $f(X)$ est donnée par $f(X) = AX$. Par conséquent, le système (4.1) s'écrit

$$f(X) = B$$

Définition 4.6.1. Le **rang** r du système est le rang de la matrice A associée, c'est-à-dire aussi le rang des vecteurs colonnes $A_1, \dots, A_n$ de A. C'est aussi le rang de l'application linéaire f associée.

Un système linéaire est dit **homogène** si le second membre B est nul, c'est-à-dire $b_1 = \dots = b_p = 0$. Il admet toujours au moins une solution : la solution nulle $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce système homogène s'écrit donc

$$\sum_{j=1} a_{ij} x_j = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, p,$$

où encore

$$AX = 0.$$

En termes de l'application linéaire $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow K^p$ associée, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est égal à l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{K}^n$ tels que $f(X) = 0_{\mathbb{K}^p}$. C'est donc le noyau $\ker(f)$ de f. D'après le théorème du noyau, $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(\mathtt{Im}(f)) = n - r$. Il en découle que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n-r$, où r est le rang du système. Il suffit alors d'exhiber une base de $\ker(f)$.

4.6.2 Systèmes de Cramer

Définition 4.6.2. *Un système linéaire est dit* ***de Cramer*** *si :*

1. *$n = p$: le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations.*
2. *la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ du système est inversible.*

Notons que l'inversiblité de la matrice A équivaut à dire que l'application linéaire associée $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow K^n$ est un isomorphisme, ou encore que pour tout vecteur colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, il existe une solution et une seule $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ du système. Le rang r du système est $r = n$.

L'écriture matricielle $AX = B$ permet alors d'obtenir immédiatement cette solution unique sous forme $X = A^{-1}B$.

Si l'on a déjà calculé la matrice inverse A^{-1} de A, alors il suffira de l'utiliser pour trouver la solution unique $X = A^{-1}B$.

Mais si on ne connaît pas A^{-1}, voici une façon commode de calculer $X = A^{-1}B$:

Ecrivons le système sous la forme vectorielle

$$x_1A_1 + \cdots + x_nA_n = B \tag{4.5}$$

Appelons Δ le déterminant de la matrice A et Δ_i le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la colonne i de A, c'est-à-dire A_i, par le second membre B :

$$\Delta = \mathtt{det}(A) = \mathtt{det}(A_1, \ldots, A_n), \qquad \Delta_i = \mathtt{det}(A_1, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n)$$

En remplaçant B par son expression tirée de (4.5), il vient

$$\Delta_i = \mathtt{det}(A_1, \ldots, A_{i-1}, \underline{B}, A_{i+1}, \ldots, A_n) = \mathtt{det}(A_1, \ldots, A_{i-1}, \underline{x_1A_1 + \cdots + x_nA_n}, A_{i+1}, \ldots, A_n)$$

Donc il apparaît n déterminants dans le développement de Δ_i dont $n-1$ sont nuls parce que chaque A_j avec $j \neq i$ y est répété deux fois. Il reste donc

$$\Delta_i = x_i\mathtt{det}(A_1, \ldots, A_n) = x_i\Delta.$$

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

Théorème 4.6.3 (Formules de Cramer)**.** *Un système de Cramer admet une solution unique* $(x_1, \ldots, x_n)$ *donnée par les* ***formules de Cramer***

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, \ldots, n)}$$

où Δ *est le déterminant du système et où* Δ_i *est le déterminant déduit de* Δ *en remplaçant la colonne* i *par la colonne des seconds membres.*

Traitons un exemple d'application pour bien assimiler les formules de Cramer.

Exemple 4.6.4. Le système linéaire

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

est un système de Cramer car $n = p = 3$ et son déterminant est $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$.

La solution unique (x, y, z) est donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}$$

Les formules de Cramer ont une importance plutôt théorique. Quand la taille n d'un système est grande, les formules de Cramer entraînent trop de calculs car on doit calculer $n + 1$ déterminants d'ordre n qui sont $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$!
On privilégie alors la méthode du pivot de Gauss, qui est la reine de toutes les méthodes, et qui se prête facilement à la programmation à l'aide des logiciels de calcul formel.

4.6.3 Méthode du pivot de Gauss

Soit (S) un système linéaire quelconque à n inconnues et p équations. Un autre système (S') à n inconnues et p équations est dit **équivalent** au système (S) s'il admet le même ensemble de solutions que (S).
L'idée consiste à transformer le système initial (S) en un nouveau système équivalent (S') qui sera *plus simple* à résoudre.
Les techniques que l'on utilise pour résoudre les systèmes linéaires se fondent sur les trois types d'**opérations élémentaires** suivantes :

- Permuter deux équations L_i et L_j : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplier une équation L_i par un scalaire $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$

- Ajouter à une équation L_i un multiple λL_j d'une autre équation L_j ($j \neq i,\ \lambda \in \mathbb{K}$ quelconque) : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Toute opération doit être effectuée sur les deux membres de l'équation.

On montre que le nouveau système est équivalent au système de départ. Ceci veut dire que l'on ne change pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire en effectuant une opération élémentaire.

Attention : les opérations doivent être faites successivement.

La **méthode du pivot de Gauss** est une méthode pratique pour résoudre un système linéaire. Elle consiste à appliquer plus opérations élémentaires. Voici les différentes étapes à suivre :

- Permuter éventuellement 2 lignes pour que dans la 1ère ligne le coefficient de x_1 soit non nul.
- Pour chaque ligne $L_2, \ldots, L_p$, remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda_i L_1$ où λ_i est choisi pour annuler le coefficient de x_1. On ne touche pas à la ligne 1.
- Répéter les opérations précédentes sur les lignes $L_2, \ldots, L_p$ (en éliminant l'inconnue x_2), et ainsi de suite.

On verra plus loin qu'on peut avoir parfois :
– des inconnues qui s'éliminent simultanément,
– des équations qui disparaissent $(0 = 0)$,
– des équations impossibles (par exemple $0 = 1$).

Voici des exemples qui valent mieux qu'un long discours abstrait :

Exemple 4.6.5. Résolvons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & (L_1) \\ 2x & +2y & +4z & +t & = & 2 & (L_2) \\ -x & -3y & & +2t & = & 2 & (L_3) \\ 3x & +4y & +4z & & = & 0 & (L_4) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & (L_1) \\ & & 2z & -t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & -2y & +z & +3t & = & 3 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ & y & +z & -3t & = & -3 & (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & \\ & y & +z & -3t & = & -3 & (L_2 \leftrightarrow L_4) \\ & -2y & +z & +3t & = & 3 & \\ & & 2z & -t & = & 0 & (L_4 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & \\ & y & +z & -3t & = & -3 & (L_2) \\ & & 3z & -3t & = & -3 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \\ & & 2z & -t & = & 0 & (L_4) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & \\ & y & +z & -3t & = & -3 & \\ & & z & -t & = & -1 & (L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3) \\ & & 2z & -t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & \\ & y & +z & -3t & = & -3 & \\ & & z & -t & = & -1 & (L_3) \\ & & & t & = & 2 & (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3) \end{array}\right.$$

On obtient ainsi un **système triangulaire** qui est facile à résoudre.

On résout en commençant par la dernière ligne et en remontant :

- $t = 2$,
- $z = -1 + t = 1$,
- $y = -3 - z + 3t = 2$,
- $x = 1 - y - z - t = -4$.

Il y a une solution unique $(-4, 2, 1, 2)$.

Exemple 4.6.6. Soit à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & (L_1) \\ 2x & +2y & +3z & +t & = & 2 & (L_2) \\ 2x & +2y & +z & +t & = & 0 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & (L_1) \\ & & z & -t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & -z & -t & = & -2 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & (L_1) \\ & & z & -t & = & 0 & (L_2) \\ & & & -2t & = & -2 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x & +y & +z & +t & = & 1 \\ & & z & -t & = & 0 \\ & & & -2t & = & -2 \end{array}\right.$$

On obtient un **système échelonné**.

x, z, t sont les **inconnues principales** (correspondant aux échelons). On fait passer y à droite et on résout en exprimant les inconnues principales x, z, t en fonction de y.

- $t = 1$,

- $z = t = 1$,
- $x = 1 - y - z - t = -1 - y$.

L'inconnue y peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$, il y a une infinité de solutions :
$S = \{(-1 - y, y, 1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble des solutions dépend d'un paramètre y.

Exemple 4.6.7. Résolvons le système suivant en discutant suivant les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +\,y & = & 1 \quad (L_1) \\ x & +2y & = & 2 \quad (L_2) \\ x & +3y & = & a \quad (L_3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & = & 1 & \\ & y & = & 1 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & 2y & = & a-1 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & = & 1 & \\ & y & = & 1 & \\ & 0 & = & a-3 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{array}\right.$$

Deux cas sont à discuter :

- Si $a = 3$ alors L_3 devient $0 = 0$ et **l'équation disparaît**. Le système devient

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & = & 1 \\ & y & = & 1 \end{array}\right.$$

  Il y a une unique solution, qui est $(1, 0)$.

- Si $a \neq 3$ alors L_3 est **impossible**. Le système n'a aucune solution.