Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 19-20
Filières SMIA
Semestre 2

TD: Algèbre III

<u>Exercice 4</u> : Soient les vecteurs $u_1 = (1, -1, i)$, $u_2 = (-1, i, 1)$ et $u_3 = (i, 1, -1)$ de $\mathbb{C}^3$.

1. Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

<u>Solution</u> :

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{C}^3}$. Comme

$$\begin{aligned}\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 &= \alpha(1, -1, i) + \beta(-1, i, 1) + \gamma(i, 1, -1)\\ &= (\alpha, -\alpha, i\alpha) + (-\beta, i\beta, \beta) + (i\gamma, \gamma, -\gamma)\\ &= (\alpha - \beta + i\gamma, -\alpha + i\beta + \gamma, i\alpha + \beta - \gamma),\end{aligned}$$

on obtient le système

$$\begin{cases}\alpha - \beta + i\gamma = 0\\ -\alpha + i\beta + \gamma = 0\\ i\alpha + \beta - \gamma = 0.\end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases}\alpha - \beta + i\gamma = 0\\ -\alpha + i\beta + \gamma = 0\\ i\alpha + \beta - \gamma = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}(i-1)\beta + (i+1)\gamma = 0\\ (i-1)\alpha + (i+1)\beta = 0\\ i\alpha + \beta - \gamma = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\gamma = -\dfrac{i-1}{i+1}\beta = -i\beta\\ \alpha = -\dfrac{i+1}{i-1}\beta = i\beta\\ i\alpha + \beta - \gamma = 0,\end{cases}$$

par suite

$$\begin{cases}i(i\beta) + \beta + i\beta = 0\\ \gamma = -i\beta\\ \alpha = i\beta\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\beta = 0\\ \alpha = 0\\ \gamma = 0\end{cases}.$$

D'où $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre. Comme $\mathrm{Card}(\{u_1, u_2, u_3\}) = 3 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3$, on en déduit que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

2. Si α_1, α_2 et α_3 sont les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, alors

$$\begin{aligned}v &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3\\ &= \alpha_1(1, -1, i) + \alpha_2(-1, i, 1) + \alpha_3(i, 1, -1)\\ &= (\alpha_1 - \alpha_2 + i\alpha_3, -\alpha_1 + i\alpha_2 + \alpha_3, i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3).\end{aligned}$$

D'où, on obtient le système

$$\begin{cases}\alpha_1 - \alpha_2 + i\alpha_3 = 1 + i\\ -\alpha_1 + i\alpha_2 + \alpha_3 = 1 - i\\ i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = i\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}(i-1)\alpha_2 + (1+i)\alpha_3 = 2i\\ (i-1)\alpha_1 + (1+i)\alpha_2 = 1\\ i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = i\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -i\alpha_2 + \frac{2i}{i+1} = -i\alpha_2 - (1+i) \\ \alpha_1 = i\alpha_2 + \frac{1}{i-1} = i\alpha_2 - \frac{i+1}{2} \\ i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = i \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} i(i\alpha_2 - \frac{i+1}{2}) + \alpha_2 - (-i\alpha_2 - (1+i)) = i \\ \alpha_3 = -i\alpha_2 - (1+i) \\ \alpha_1 = i\alpha_2 - \frac{i+1}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{1+3i}{2} \\ \alpha_3 = -i\frac{1+3i}{2} - (1+i) = -\frac{3i+5}{2} \\ \alpha_1 = i\frac{1+3i}{2} - \frac{i+1}{2} = -2 \end{cases}$$

et donc les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3) sont -2, $\frac{1+3i}{2}$ et $-\frac{3i+5}{2}$. $\square$

Exercice 5 :

1. Soit $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ une famille de polynômes échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$, c'est-à-dire vérifiant $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Montrer que $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille $\{1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Solution :

1. Montrons que la famille $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ est libre. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0_{\mathbb{K}_n[X]}.$$

Pour $i \geq 1$ posons

$$P_i(X) = a_i X^i + Q_i(X) \quad \text{où } a_i \neq 0,\ \deg(Q_i(X)) \leq i-1.$$

Alors

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = \alpha_n a_n X^n + U(X)$$

où $U(X) \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(U(X)) \leq n-1$, puisque pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ $\deg(P_i) = i$. Donc $\alpha_n = 0$, puisque $\alpha_n a_n X^n + U(X) = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0$ et $\deg(U(X)) \leq n-1$. Ainsi

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n_1} + \alpha_n P_n = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = 0,$$

et donc le même raisonnement montre que $\alpha_{n-1} = 0$. Ainsi de suite on montre que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. Reste à montrer que $\alpha_0 = 0$. En effet, on a

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = \alpha_0 P_0 = 0,$$

donc $\alpha_0 = 0$. On en déduit que la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est libre.

Finalement la famille $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, puisque

$$\mathrm{Card}(\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}) = n+1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X].$$

2. La famille $\{1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\}$ est échelonnée, donc d'après 1), $\{1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, d'après la formule de Taylor nous obtenons

$$P(x) = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P^{(2)}(a)}{2!}(X-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

Donc les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base $\{1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\}$ sont $P(a), P'(a), \cdots$ et $\frac{P^{(n)}(a)}{n!}$. $\square$

Exercice 6 : Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, soit le sous-espace

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x - y + z = 0\}.$$

1. Donner une base et la dimension de F.
2. Soit $G = \text{Vect}\{(1, 1, -1)\}$. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E?

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in E \mid x - y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in E \mid x = y - z\} \\ &= \{(y - z, y, z) \in E \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(y, y, 0) + (-z, 0, z) \in E \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \in E \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Donc $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est une famille génératrice de F.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) = 0_E$. Alors

$$(\alpha - \beta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0),$$

et donc $\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$. D'où la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est libre. Par suite la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est une base de F. Par définition $\dim F = \text{Card}\{\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}\} = 2$.

2. Il suffit de montrer que la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ forme une base de E, puisque $F = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, 1, -1)\}$. En effet, soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) + \gamma(1, 1, -1) = (0, 0, 0).$$

Alors

$$(\alpha - \beta + \gamma, \alpha + \gamma, \beta - \gamma) = (0, 0, 0).$$

Donc

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha = -\gamma \\ -\gamma - \gamma + \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

D'où la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ est libre. Comme de plus

$$\text{Card}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, -1)\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ est une base de E.

3. On a d'une part $(1, 1, 0) \in F$ et $(1, 1, 0) \notin G$ et d'autre part $(1, 1, -1) \in G$ et $(1, 1, -1) \notin F$. Donc $F \nsubseteq G$ et $G \nsubseteq F$. Ainsi $G \cup F$ n'est pas un espace vectoriel. □

Exercice 7 : Soient les sous-espaces

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y+z=0\} \quad \text{et} \quad G=\{(6a+b,8a+2b,-a+3b)\ |a,b\in\mathbb{R}\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels $F, G, F\cap G$ et $F+G$.

Solution :

(i) On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y+z=0\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=2x+z\}\\ &= \{(x,2x+z,z) \mid x,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(x,2x,0)+(0,z,z) \mid x,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,2,0)+z(0,1,1) \mid x,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \text{Vect}\{(1,2,0),(0,1,1)\}\end{aligned}$$

Donc $F=\text{Vect}\{(1,2,0),(0,1,1)\}$.
Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)=(0,0,0)$. Alors $(\alpha,2\alpha+\beta,\beta)=(0,0,0)$. Donc

$$\begin{cases}\alpha=0\\ 2\alpha+\beta=0\\ \beta=0\end{cases}$$

D'où la famille $\{(1,2,0),(0,1,1)\}$ est libre. Par suite $\{(1,2,0),(0,1,1)\}$ est une base de F, et donc $\dim F=2$.

(ii) On a

$$\begin{aligned} G &= \{(6a+b,8a+2b,-a+3b)\ |a,b\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(6a,8a,-a)+(b,2b,3b)\ |a,b\in\mathbb{R}\}\\ &= \{a(6,8,-1)+b(1,2,3)\ |a,b\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Donc $\{(6,8,-1),(1,2,3)\}$ est une famille géneratrice de G.
Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha(6,8,-1)+\beta(1,2,3)=(0,0,0)$. Alors

$$\begin{cases}6\alpha+\beta=0\\ 8\alpha+2\beta=0\\ -\alpha+3\beta=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\beta=-6\alpha\\ 8\alpha-12\alpha=0\\ -\alpha-18\alpha=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$$

D'où la famille $\{(6,8,-1),(1,2,3)\}$ est libre. Par suite $\{(6,8,-1),(1,2,3)\}$ est une base de G, et donc $\dim G=2$.

(iii) Soit $(x,y,z)\in F\cap G$. Alors il existe $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tels que

$$(x,y,z)=\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1) \quad \text{et} \quad (x,y,z)=\gamma(6,8,-1)+\delta(1,2,3).$$

Donc

$$\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)=\gamma(6,8,-1)+\delta(1,2,3).$$

Ainsi, nous obtenons le système

$$\begin{cases} \alpha - 6\gamma - \delta = 0 \\ 2\alpha + \beta - 8\gamma - 2\delta = 0 \\ \beta + \gamma - 3\delta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha - 6\gamma - \delta = 0 \\ \beta + 4\gamma = 0 \\ \beta + \gamma - 3\delta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha - 6\gamma - \delta = 0 \\ \beta + 4\gamma = 0 \\ -3\gamma - 3\delta = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \gamma = -\delta \\ \beta = -4\gamma = 4\delta \\ \alpha = 6\gamma + \delta = -6\delta + \delta = -5\delta \end{cases}$$

D'où

$$(x, y, z) = \gamma(6, 8, -1) + \delta(1, 2, 3) = -\delta(6, 8, -1) + \delta(1, 2, 3) = \delta(-5, -6, 4),$$

et donc $F \cap G = \text{Vect}\{(-5, -6, 4)\}$. Or $(-5, -6, 4) \neq (0, 0, 0)$, $\{(-5, -6, 4)\}$ est une base de $G \cap F$. Donc $\dim G \cap F = 1$.

(iv) D'après (i) et (ii), on a $F = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(6, 8, -1), (1, 2, 3)\}$. Donc $F + G = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (6, 8, -1), (1, 2, 3)\}$. D'après (iii), pour $\delta = 1$, on obtient

$$(1, 2, 3) = -5(1, 2, 0) + 4(0, 1, 1) + (6, 8, -1),$$

donc $(1, 2, 3) \in \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (6, 8, -1)\}$. Ainsi $F+G = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (6, 8, -1)\}$. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1, 2, 0)+\beta(0, 1, 1)+\gamma(6, 8, -1) = (0, 0, 0)$. Alors nous avons le système

$$\begin{cases} \alpha + 6\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 8\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha = -6\gamma \\ 2\alpha + \beta + 8\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha = -6\gamma \\ -12\gamma + \gamma + 8\gamma = -3\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (6, 8, -1)\}$ est libre, par suite c'est une base $F + G$. Ainsi $\dim(F + G) = 3$.

Exercice 8 : Soit l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et donner une base et la dimension de F.
2. Montrer que le sous-espace $G = \text{Vect}\{1, X, 1 + X + X^2\}$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_4[X]$.

Solution :

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$. En effet, $0_{\mathbb{C}[X]} \in F$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $P, Q \in F$, montrons que $\alpha P + \beta Q \in F$. En effet, on a

$$\begin{aligned} (\alpha P + \beta Q)(0) &= \alpha P(0) + \beta Q(0) \\ &= 0, \text{car } P(0) = Q(0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha P + \beta Q)'(0) &= \alpha P'(0) + \beta Q'(0) \\ &= 0, \text{car } P'(0) = Q'(0) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\alpha P + \beta Q)'(1) &= \alpha P'(0) + \beta Q'(1) \\ &= 0, \text{car } P'(1) = Q'(1) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\alpha P+\beta Q\in F$, par suite F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$.
Soit $P(X)=a_4X^4+a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0\in F$. Alors

$$\begin{cases} 0=P(0)=a_0 \\ 0=P'(0)=a_1 \\ 0=P'(1)=4a_4+3a_3+2a_2+a_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_1=0 \\ 4a_4+3a_3+2a_2=0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X) &= a_4X^4+a_3X^3+(-2a_4-\frac{3}{2}a_3)X^2 \\ &= a_4(X^4-2X^2)+a_3(X^3-\frac{3}{2}X^2). \end{aligned}$$

D'où $F=\mathrm{Vect}\{X^4-2X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2\}$. Si $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tel que $\alpha(X^4-2X^2)+\beta(X^3-\frac{3}{2}X^2)=0$, alors

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ -2\alpha-\frac{3}{2}\beta=0 \end{cases}$$

Ainsi la famille $\{X^4-2X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2\}$ est libre, par suite c'est une base de F, et donc $\dim F=2$.

2. Pour montrer que $G=\mathrm{Vect}\{1,X,1+X+X^2\}$ est un supplémentaire de $F=\mathrm{Vect}\{X^4-2X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2\}$ dans $\mathbb{C}_4[X]$, il suffit de montrer que $\{1,X,1+X+X^2,X^3-\frac{3}{2}X^2,X^4-2X^2\}$ est une base de $\mathbb{C}_4[X]$. Remarquons que $\{1,X,1+X+X^2,X^3-\frac{3}{2}X^2,X^4-2X^2\}$ est une famille de polynômes échelonnés dans $\mathbb{C}_4[X]$, donc d'après l'Exercice 5, $\{1,X,1+X+X^2,X^3-\frac{3}{2}X^2,X^4-2X^2\}$ est une base de $\mathbb{C}_4[X]$.