

TD: Algèbre III

Exercice 4 : Soient les vecteurs $u_1 = (1, -1, i)$, $u_2 = (-1, i, 1)$ et $u_3 = (i, 1, -1)$ de \mathbb{C}^3 .

1. Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{C}^3 .
2. Calculer les coordonnées du vecteur $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

Solution :

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{C}^3}$. Comme

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 &= \alpha(1, -1, i) + \beta(-1, i, 1) + \gamma(i, 1, -1) \\ &= (\alpha, -\alpha, i\alpha) + (-\beta, i\beta, \beta) + (i\gamma, \gamma, -\gamma) \\ &= (\alpha - \beta + i\gamma, -\alpha + i\beta + \gamma, i\alpha + \beta - \gamma), \end{aligned}$$

on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha - \beta + i\gamma = 0 \\ -\alpha + i\beta + \gamma = 0 \\ i\alpha + \beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \alpha - \beta + i\gamma = 0 \\ -\alpha + i\beta + \gamma = 0 \\ i\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (i-1)\beta + (i+1)\gamma = 0 \\ (i-1)\alpha + (i+1)\beta = 0 \\ i\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma = -\frac{i-1}{i+1}\beta = -i\beta \\ \alpha = -\frac{i+1}{i-1}\beta = i\beta \\ i\alpha + \beta - \gamma = 0, \end{cases}$$

par suite

$$\begin{cases} i(i\beta) + \beta + i\beta = 0 \\ \gamma = -i\beta \\ \alpha = i\beta \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

D'où $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre. Comme $\text{Card}(\{u_1, u_2, u_3\}) = 3 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3$, on en déduit que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{C}^3 .

2. Si α_1, α_2 et α_3 sont les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, alors

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \\ &= \alpha_1(1, -1, i) + \alpha_2(-1, i, 1) + \alpha_3(i, 1, -1) \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2 + i\alpha_3, -\alpha_1 + i\alpha_2 + \alpha_3, i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned}$$

D'où, on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + i\alpha_3 = 1 + i \\ -\alpha_1 + i\alpha_2 + \alpha_3 = 1 - i \\ i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = i \end{cases} \implies \begin{cases} (i-1)\alpha_2 + (1+i)\alpha_3 = 2i \\ (i-1)\alpha_1 + (1+i)\alpha_2 = 1 \\ i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -i\alpha_2 + \frac{2i}{i+1} = -i\alpha_2 - (1+i) \\ \alpha_1 = i\alpha_2 + \frac{1}{i-1} = i\alpha_2 - \frac{i+1}{2} \\ i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = i \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} i(i\alpha_2 - \frac{i+1}{2}) + \alpha_2 - (-i\alpha_2 - (1+i)) = i \\ \alpha_3 = -i\alpha_2 - (1+i) \\ \alpha_1 = i\alpha_2 - \frac{i+1}{2} \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{1+3i}{2} \\ \alpha_3 = -i\frac{1+3i}{2} - (1+i) = -\frac{3i+5}{2} \\ \alpha_1 = i\frac{1+3i}{2} - \frac{i+1}{2} = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

et donc les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3) sont $-2, \frac{1+3i}{2}$ et $-\frac{3i+5}{2}$. \square

Exercice 5 :

1. Soit $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ une famille de polynômes échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$, c'est-à-dire vérifiant $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille $\{1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Solution :

1. Remarquons que $\text{Card}(\{P_0, P_1, \dots, P_n\}) = n + 1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X]$. Donc il suffit de montrer que la famille $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est libre. En effet, soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = 0_{\mathbb{K}_n[X]}.$$

Pour $i \geq 1$ posons

$$P_i(X) = a_i X^i + Q_i(X) \quad \text{où } a_i \neq 0, \deg(Q_i(X)) \leq i - 1.$$

Alors

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = \alpha_n a_n X^n + U(X)$$

où $U(X) \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(U(X)) \leq n - 1$, puisque pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\deg(P_i) = i$. Donc $\alpha_n = 0$, puisque $\alpha_n a_n X^n + U(X) = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = 0$ et $\deg(U(X)) \leq n - 1$. Ainsi

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{n-1} P_{n-1} + \alpha_n P_n = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = 0,$$

et donc le même raisonnement montre que $\alpha_{n-1} = 0$. Ainsi de suite on montre que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Reste à montrer que $\alpha_0 = 0$. En effet, on a

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = \alpha_0 P_0 = 0,$$

donc $\alpha_0 = 0$. D'où la famille $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est libre. Par suite $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. La famille $\{1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n\}$ est échelonnée, donc d'après 1), $\{1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, d'après la formule de Taylor nous obtenons

$$P(x) = P(a) + P'(a)(X - a) + \frac{P^{(2)}(a)}{2!}(X - a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n$$

Donc les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base $\{1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n\}$ sont $P(a), P'(a), \dots$ et $\frac{P^{(n)}(a)}{n!}$. \square

Exercice 6 : Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, soit le sous-espace

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x - y + z = 0\}.$$

1. Donner une base et la dimension de F .
2. Soit $G = \text{Vect}\{(1, 1, -1)\}$. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in E \mid x - y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in E \mid x = y - z\} \\ &= \{(y - z, y, z) \in E \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(y, y, 0) + (-z, 0, z) \in E \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \in E \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Donc $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est une famille génératrice de F .

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) = 0_E$. Alors

$$(\alpha - \beta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0),$$

et donc $\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$. D'où la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est libre. Par suite la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est une base de F . Par définition $\dim F = \text{Card}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\} = 2$.

2. Il suffit de montrer que la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ forme une base de E , puisque $F = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, 1, -1)\}$. En effet, soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) + \gamma(1, 1, -1) = (0, 0, 0).$$

Alors

$$(\alpha - \beta + \gamma, \alpha + \gamma, \beta - \gamma) = (0, 0, 0).$$

Donc

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha = -\gamma \\ -\gamma - \gamma + \gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

D'où la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ est libre. Comme de plus

$$\text{Card}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, -1)\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ est une base de E .

3. On a d'une part $(1, 1, 0) \in F$ et $(1, 1, 0) \notin G$ et d'autre part $(1, 1, -1) \in G$ et $(1, 1, -1) \notin F$. Donc $F \not\subseteq G$ et $G \not\subseteq F$. Ainsi $G \cup F$ n'est pas un espace vectoriel. \square

Exercice 7 : Soient les sous-espaces

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(6a + b, 8a + 2b, -a + 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels $F, G, F \cap G$ et $F + G$.

Solution :

(i) On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x + z\} \\ &= \{(x, 2x + z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 2x, 0) + (0, z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Alors $(\alpha, 2\alpha + \beta, \beta) = (0, 0, 0)$. Donc

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

D'où la famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ est libre. Par suite $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de F , et donc $\dim F = 2$.

(ii) On a

$$\begin{aligned} G &= \{(6a + b, 8a + 2b, -a + 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(6a, 8a, -a) + (b, 2b, 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(6, 8, -1) + b(1, 2, 3) \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Donc $\{(6, 8, -1), (1, 2, 3)\}$ est une famille génératrice de G .

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(6, 8, -1) + \beta(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$. Alors

$$\begin{cases} 6\alpha + \beta = 0 \\ 8\alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = -6\alpha \\ 8\alpha - 12\alpha = 0 \\ -\alpha - 18\alpha = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

D'où la famille $\{(6, 8, -1), (1, 2, 3)\}$ est libre. Par suite $\{(6, 8, -1), (1, 2, 3)\}$ est une base de G , et donc $\dim G = 2$.

(iii) Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Alors il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 1) \quad \text{et} \quad (x, y, z) = \gamma(6, 8, -1) + \delta(1, 2, 3).$$

Donc

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 1) = \gamma(6, 8, -1) + \delta(1, 2, 3).$$

Ainsi, nous obtenons le système

$$\begin{cases} \alpha - 6\gamma - \delta = 0 \\ 2\alpha + \beta - 8\gamma - 2\delta = 0 \\ \beta + \gamma - 3\delta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha - 6\gamma - \delta = 0 \\ \beta + 4\gamma = 0 \\ \beta + \gamma - 3\delta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha - 6\gamma - \delta = 0 \\ \beta + 4\gamma = 0 \\ -3\gamma - 3\delta = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \gamma = -\delta \\ \beta = -4\gamma = 4\delta \\ \alpha = 6\gamma + \delta = -6\delta + \delta = -5\delta \end{cases}$$

D'où

$$(x, y, z) = \gamma(6, 8, -1) + \delta(1, 2, 3) = -\delta(6, 8, -1) + \delta(1, 2, 3) = \delta(-5, -6, 4),$$

et donc $F \cap G = \text{Vect}\{(-5, -6, 4)\}$. Or $(-5, -6, 4) \neq (0, 0, 0)$, $\{(-5, -6, 4)\}$ est une base de $G \cap F$. Donc $\dim G \cap F = 1$.

(iv) D'après (i) et (ii), on a $F = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(6, 8, -1), (1, 2, 3)\}$. Donc $F + G = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (6, 8, -1), (1, 2, 3)\}$. D'après (iii), pour $\delta = 1$, on obtient

$$(1, 2, 3) = -5(1, 2, 0) + 4(0, 1, 1) + (6, 8, -1),$$

donc $(1, 2, 3) \in \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (6, 8, -1)\}$. Ainsi $F + G = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (6, 8, -1)\}$. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(6, 8, -1) = (0, 0, 0)$. Alors nous avons le système

$$\begin{cases} \alpha + 6\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 8\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha = -6\gamma \\ 2\alpha + \beta + 8\gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha = -6\gamma \\ -12\gamma + \gamma + 8\gamma = -3\gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (6, 8, -1)\}$ est libre, par suite c'est une base $F + G$. Ainsi $\dim(F + G) = 3$.

Exercice 8 : Soit l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un \mathbb{C} -espace vectoriel, et donner une base et la dimension de F .
2. Montrer que le sous-espace $G = \text{Vect}\{1, X, 1 + X + X^2\}$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_4[X]$.

Solution :

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$. En effet, $0_{\mathbb{C}_4[X]} \in F$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $P, Q \in F$, montrons que $\alpha P + \beta Q \in F$. En effet, on a

$$\begin{aligned} (\alpha P + \beta Q)(0) &= \alpha P(0) + \beta Q(0) \\ &= 0 \quad (\text{car } P(0) = Q(0) = 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha P + \beta Q)'(0) &= \alpha P'(0) + \beta Q'(0) \\ &= 0 \quad (\text{car } P'(0) = Q'(0) = 0), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\alpha P + \beta Q)'(1) &= \alpha P'(1) + \beta Q'(1) \\ &= 0, \quad (\text{car } P'(1) = Q'(1) = 0). \end{aligned}$$

Donc $\alpha P + \beta Q \in F$, par suite F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$.

Soit $P(X) = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in F$. Alors

$$\begin{cases} 0 = P(0) = a_0 \\ 0 = P'(0) = a_1 \\ 0 = P'(1) = 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X) &= a_4X^4 + a_3X^3 + (-2a_4 - \frac{3}{2}a_3)X^2 \\ &= a_4(X^4 - 2X^2) + a_3(X^3 - \frac{3}{2}X^2). \end{aligned}$$

D'où $F = \text{Vect}\{X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2\}$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha(X^4 - 2X^2) + \beta(X^3 - \frac{3}{2}X^2) = 0$, alors

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\alpha - \frac{3}{2}\beta = 0 \end{cases}$$

Ainsi la famille $\{X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2\}$ est libre, par suite c'est une base de F , et donc $\dim F = 2$.

2. Pour montrer que $G = \text{Vect}\{1, X, 1 + X + X^2\}$ est un supplémentaire de $F = \text{Vect}\{X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2\}$ dans $\mathbb{C}_4[X]$, il suffit de montrer que $\{1, X, 1 + X + X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2, X^4 - 2X^2\}$ est une base de $\mathbb{C}_4[X]$. Remarquons que $\{1, X, 1 + X + X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2, X^4 - 2X^2\}$ est une famille de polynômes échelonnés dans $\mathbb{C}_4[X]$, donc d'après l'Exercice 5, $\{1, X, 1 + X + X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2, X^4 - 2X^2\}$ est une base de $\mathbb{C}_4[X]$.