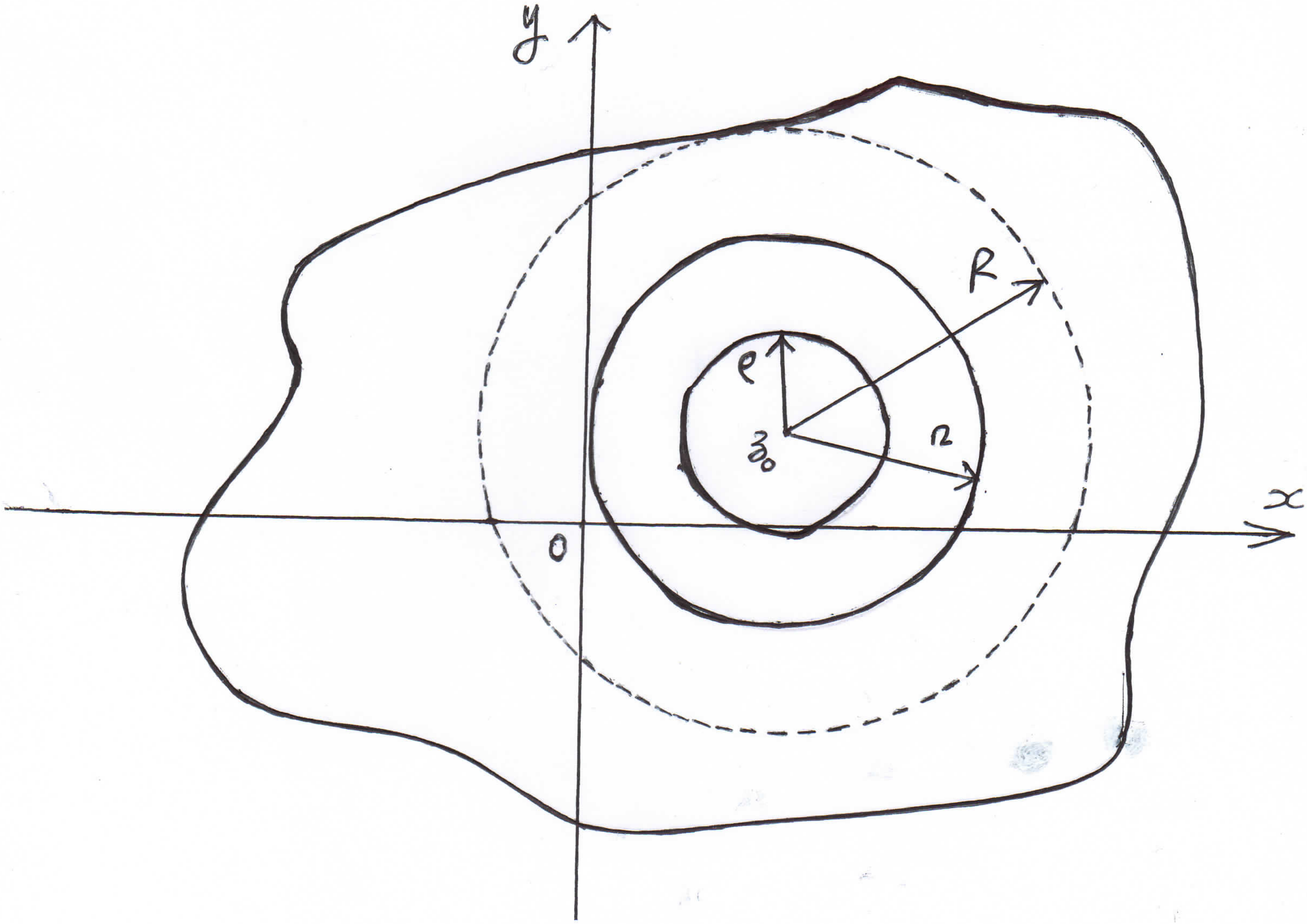
Corrigés des Exercices du Chapitre V

Exercice 1. On montre que f admet un développement en série entière qui converge uniformément sur toute boule fermée $\overline{B}(z_0,\rho)$ dans $B(z_0,R)$.

Soit $\rho \in]0,R[$. Et considérons r tel que $\rho < r < R$. Comme f est holomorphe à l'intérieur et sur $\mathcal{C}(z_0,r)$, la formule de Cauchy implique que :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(y)}{y-z}\,dy \qquad \forall z \in B(z_0,r).$$



Pour tout $z \in \overline{B}(z_0, \rho)$, on a :

$$\frac{1}{y-z} = \frac{1}{(y-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{y-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{y-z_0}}$$

$$= \frac{1}{y-z_0} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z-z_0}{y-z_0}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(z-z_0)^n}{(y-z_0)^{n+1}}$$

$$(|z-z_0| \leq \rho < r = |y-z_0|).$$

La fonction f est continue et bornée sur $C(z_0, r)$.

Pour tout $y \in C(z_0, r)$, on a :

$$\left|(z-z_0)^n \frac{f(y)}{(y-z_0)^{n+1}}\right| \leq M \frac{\rho^n}{r^{n+1}} = \frac{M}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n = M_n.$$

Comme $\frac{\rho}{r} < 1$, la série $\sum_n M_n$ converge.

Et alors la série $\frac{f(y)}{y-z} = \sum_{n\geq 0} (z-z_0)^n \frac{f(y)}{(y-z_0)^{n+1}}$ converge

uniformément sur $y \in C(0, r)$.

En intégrant terme à terme les deux membres de l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(y)}{y-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} (z-z_0)^n \frac{f(y)}{(y-z_0)^{n+1}},$$

et en utilisant la formule de Cauchy généralisée,

on déduit :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(y)}{y-z}\, dy$$

$$= \sum_{n\geq 0} (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(y)}{(y-z_0)^{n+1}}\, dy}_{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n .$$

L'unicité découle de l'unicité de l'expression des séries entières.

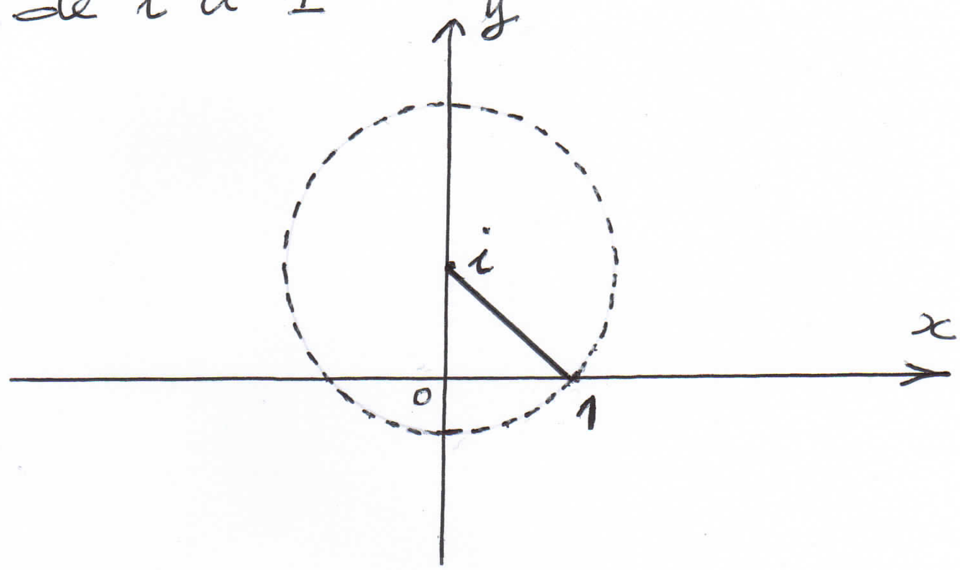
Exercice 2. Comme g est holomorphe sur un voisinage de 0, elle possède la série de Taylor suivante :

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n .$$

On peut calculer $g^{(n)}(0)$ en prenant $z \longrightarrow 0$ avec $z = x$ réel ; et comme $g = f$ sur un intervalle ouvert contenant 0, on doit avoir $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)\ \forall n$. Et alors, les coefficients des séries de Taylor de f et g sont les mêmes.

Exercice 3. Avant de calculer le développement de Taylor des fonctions, on peut déterminer leurs rayons de convergence.

1) La série de Taylor de $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en $z_0 = i$ converge dans la plus grande boule centrée en $z_0 = i$ sur laquelle f est holomorphe.
Comme f est holomorphe pour tout $z \neq 1$, la série de Taylor a pour rayon de convergence $R = \sqrt{2}$ qui est la distance de i à 1



Pour tout $z \in B(i, \sqrt{2})$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1 - \frac{z-i}{1-i}}$$

$$= \frac{1}{1-i} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n \qquad \left(\left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1 \right)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

2) la fonction $f(z) = \frac{1}{4-iz}$ est holomorphe sauf pour $z = -4i$.
sa série de Taylor en $z_0 = 3$ converge dans la boule centrée en 3 et arrivant à $-4i$. Donc, son rayon de

convergence est $R=5$.

Pour tout $z \in B(3,5)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{4-iz} = \frac{1}{i(-4i-z)} = \frac{-i}{-4i-z}$$

$$= \frac{-i}{(-4i-3)-(z-3)} = \frac{-i}{-3-4i}\,\frac{1}{1-\frac{z-3}{-3-4i}}$$

$$= \frac{-i}{-3-4i}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-3}{-3-4i}\right)^n \qquad \left(\left|\frac{z-3}{-3-4i}\right|<1\right)$$

$$= -i\sum_{n\geq 0}\frac{(z-3)^n}{(-3-4i)^{n+1}} = -i\sum_{n\geq 0}\frac{(-3+4i)^{n+1}}{25^{n+1}}(z-3)^n.$$

3) La série de Taylor de $f(z) = \frac{z}{1-z}$ en $z_0 = 0$ admet un rayon de convergence égal à la distance de 0 au plus proche point pour lequel f n'est pas holomorphe. Donc c'est la distance de 0 à 1, et alors $R=1$. (Ce rayon aussi peut être déduit de la série de Taylor elle-même).

Pour tout $z \in B(0,1)$, on a :

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z\sum_{n\geq 0} z^n = \sum_{n\geq 0} z^{n+1}$$

4) La fonction $f(z) = ze^z$ est entière, et alors sa série de Taylor admet comme rayon de convergence $R=+\infty$.

• Notons d'abord que la série de Taylor de f en 0 est facile à obtenir :

$$f(z) = ze^z = z\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{z^{n+1}}{n!}.$$

. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a :

$$(z-1)e^{z-1} = e^{-1}ze^z - e^{z-1} = e^{-1}f(z) - e^{z-1}$$

$$\Rightarrow f(z) = e\left[(z-1)e^{z-1} + e^{z-1}\right]$$

$$= e\left[\sum_{n\geq 0}\frac{(z-1)^{n+1}}{n!} + \sum_{n\geq 0}\frac{(z-1)^n}{n!}\right]$$

$$= e\left[\sum_{n\geq 1}\frac{(z-1)^n}{(n-1)!} + 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(z-1)^n}{n!}\right]$$

$$= e\left[1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(z-1)^n}{(n-1)!} + \frac{(z-1)^n}{n!}\right]$$

$$= e\left[1 + \sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{n!}(z-1)^n\right].$$

<u>Exercice 4</u>: Le plus proche point de $z_0 = 0$ sur lequel f n'est pas holomorphe est 1.

Donc, le rayon de convergence de la série de Taylor de f en $z_0 = 0$ est $R = 1$.

<u>1ère méthode</u>: Pour tout $z\in B(0,1)$, on a :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \text{ et } \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Donc, $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n - \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}}$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n\geq 0}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \quad \forall z \in B(0,1).$$

<u>2e méthode</u> : Pour tout $z \in B(0,1)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{2-z} = \left(\sum_{n\geq 0} z^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

où c_n est obtenu par la formule du produit de Cauchy :

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n z^n = \sum_{n\geq 0} c_n z^n \text{ avec } c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \forall n.$$

Alors, on a :

$$a_k = 1 \quad \text{et} \quad b_{n-k} = \frac{1}{2^{n-k+1}} \quad \forall k,n \in \mathbb{N}.$$

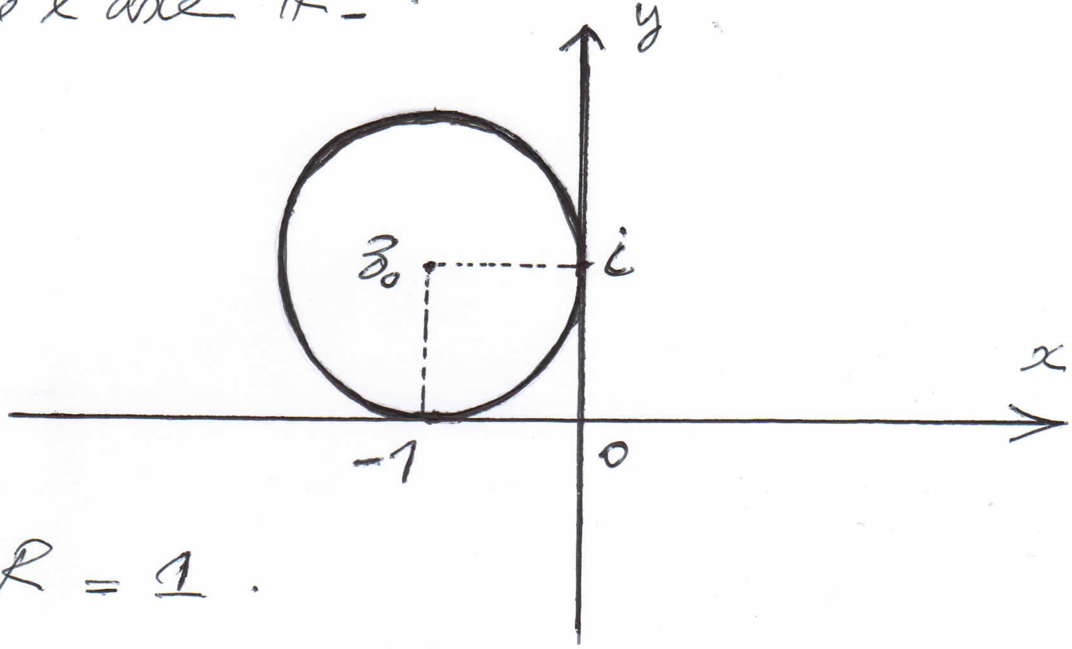
Donc : $$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n-k+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} 2^k$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Donc : $$f(z) = \sum_{n\geq 0}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \quad \forall z \in B(0,1).$$

<u>**Exercice 5.**</u> On sait que le logarithme principal est défini et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Et alors le rayon de

Convergence de la série de Taylor de $f(z) = \mathrm{Log}(z)$ en $z_0 = -1+i$ est égal à la plus petite distance séparant z_0 de l'axe $\mathbb{R}_-$.



Donc : $R = 1$.

Pour tout $z \in B(z_0, 1)$, on a :

$$f'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 - (z_0 - z)} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 - \frac{z_0 - z}{z_0}}$$

$$= \frac{1}{z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z_0 - z}{z_0} \right)^n \quad \left(\left| \frac{z_0 - z}{z_0} \right| < 1 \right)$$

$$= \frac{1}{z_0} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(z - z_0)^n}{z_0^n}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z_0} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{(z - z_0)^{n+1}}{z_0^n} + C$$

$$\Rightarrow \int_{z_0}^{z} \frac{1}{z} dz = \mathrm{Log}(z) - \mathrm{Log}(z_0) = \frac{1}{z_0} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1) z_0^n} (z - z_0)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(-1+i) + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(-1+i)^n} (z + 1 - i)^n$$

$$\forall z \in B(-1+i, 1).$$

Remarque : Même si la série de Taylor en z_0 admet le rayon de convergence égal à $\sqrt{2}$, le rayon de convergence de la série de Taylor de Log en z_0 est égal à 1, et cela est dû au fait que Log n'est pas défini sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 6. Il est évident que g est holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$.

Montrons que g est holomorphe en z_0.

Soit $R > 0$ tel que $B(z_0, R) \subset U$.

On sait que f admet un développement de Taylor en z_0 qui converge dans $B(z_0, R)$:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots\cdots$$

$$\Rightarrow f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

$$= (z - z_0)\left[f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \cdots\right]$$

avec $g(z) = f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \cdots \quad \forall z \in B(z_0, R)$.

Donc, g est holomorphe sur $B(z_0, R)$.

Et alors, g est holomorphe sur U.

Exercice 7. 1) Soit $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

D'après l'exercice 6, g est holomorphe en 0.

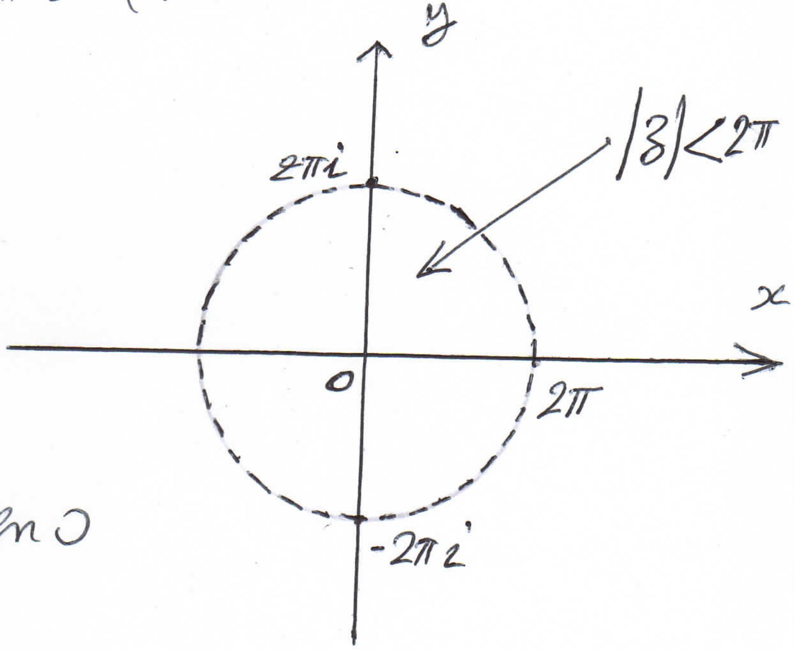
Comme $g(0) \neq 0$ et $f = \frac{1}{g}$, f est holomorphe en 0.

2) La série de Taylor de f en 0 converge dans la plus grande boule centrée en 0 sur laquelle f est définie et holomorphe.

Loin de 0 f est holomorphe en z tel que $e^z - 1 \neq 0$

Or $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i \ (k \in \mathbb{Z})$

Et alors la série de Taylor de f en 0 converge pour tout $|z| < 2\pi$.



Donc, le rayon de convergence de la série de Taylor de f en 0 est $R = 2\pi$.

3) Écrivons la série de Taylor de f en 0 sous la forme suivante : $$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n \quad \forall z \in B(0, 2\pi).$$

a) Alors, on a :

$$z = (e^z - 1) f(z) = (e^z - 1) \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$$
$$= \sum_{n \geq 1} c_n z^n \quad \forall z \in B(0, 2\pi)$$

où c_n est le coefficient calculé par la formule du produit de Cauchy :

$$\left(\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n\right) = \sum_n c_n \quad \text{et} \quad c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j . b_{n-j} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right)$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k .$$

Par unicité du développement de Taylor, on a :

$$c_1 = 1 \quad \text{et} \quad c_n = 0 \quad \forall n \geq 2 .$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{1!} B_0 = 1 \Rightarrow B_0 = 1 .$$

$$c_n = 0 \ \forall n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0 \quad \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k B_k = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k + \frac{1}{(n+1)!} C_{n+1}^n B_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k \quad \forall n \geq 1 .$$

b) $B_1 = \frac{-1}{2}$. Alors, on a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + B_1 z + \sum_{n\geq 2} \frac{B_n}{n!} z^n$$

$$\Rightarrow f(z) - B_1 z = 1 + \sum_{m\geq 2} \frac{B_m}{m!} z^m .$$

Or $f(z) - B_1 z = \dfrac{z}{e^z - 1} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{z + z e^z}{2(e^z - 1)}$

$$= \frac{z}{2} \frac{1 + e^z}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \frac{e^{\frac{z}{2}}\left(e^{-\frac{z}{2}} + e^{\frac{z}{2}}\right)}{e^{\frac{z}{2}}\left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}\right)}$$

$$= \frac{z}{2} \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \frac{z}{2} \coth\left(\frac{z}{2}\right)$$

Donc : $\dfrac{z}{2} \coth\left(\dfrac{z}{2}\right) = 1 + \displaystyle\sum_{m\geq 2} \frac{B_m}{m!} z^m .$

Et comme la fonction $\frac{z}{2} \coth\left(\frac{z}{2}\right)$ est paire, par unicité de la série de Taylor associée à cette fonction, tous les coefficients impaires de cette série doivent être nuls.

Donc : $B_{2k+1} = 0 \quad \forall k \geq 1 .$

<u>Remarque</u> : Pour tout $z \in B(0, 2\pi)$, on a :

$$f(z) + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \coth\left(\frac{z}{2}\right) = 1 + \sum_{m\geq 2} \frac{B_m}{m!} z^m$$

$$\Rightarrow \frac{z}{2} \coth\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2} + 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m\geq 2} \frac{B_m}{m!} z^m$$

$$= 1 + \sum_{m\geq 1} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m} = \sum_{m\geq 0} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m}$$

Et alors, en remplaçant z par $2z$, on aura :

$$z\coth(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \forall z \in B(0,\pi).$$

Exercice 8: 1) Pour tout $z \in B(0,1)$, on a :

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n\geq 0} z^{2n}, \quad \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Donc, notant $a_{2k} = 1+3^{-2k-1}$ et $a_{2k+1} = 3^{-2k-2}$ $(k\in\mathbb{N})$, on a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

2) Pour tout $z \in \mathcal{C}(0,1,3)$, on a :

$$\frac{1}{1-z^2} = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{2n+2}}, \quad \frac{1}{3-z} = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Donc, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$, avec :

$$\begin{cases} b_n = 3^{-n-1} & \text{si } n\in\mathbb{N} \\ b_n = -1 & \text{si } n \in -2\mathbb{N}^* \\ b_n = 0 & \text{si } n \in -2\mathbb{N}^*+1 \end{cases}$$

3) Pour tout $z \in \mathcal{C}(0,3,+\infty)$, on a :

$$\frac{1}{1-z^2} = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{2n+2}}, \quad \frac{1}{3-z} = \frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = -\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{z^{n+1}}$$

Donc : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$, avec :

$$\begin{cases} c_{2n} = -1 - 3^{-2n+1} & (n \in -\mathbb{N}^*) \\ c_{2n+1} = -3^{-2n-2} & (n \in -\mathbb{N}^*) . \end{cases}$$

Exercice 9. 1) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$; $z_0 = 0$.

La fonction f est holomorphe sur la couronne $\mathcal{C}(0,0,+\infty) = \{z / |z| > 0\}$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Et alors $\forall z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!\, z^n} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!\, z^n} .$$

Donc, le développement de Laurent de f sur la couronne $\mathcal{C}(0,0,\infty)$ est :

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{-n}}{n!}$$

2) $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z_0 = 0$.

f est holomorphe sur la couronne $\mathcal{C}(0,1,+\infty)$.

Pour tout $z \in \mathcal{C}(0,1,+\infty)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{-1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{-1}{z} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{-1}{z^{n+1}} = \sum_{n \geq 1} \frac{-1}{z^n} \qquad \left(\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \right)$$

Donc, le développement de Laurent de f sur la couronne $\mathcal{C}(0,1,+\infty)$ est : $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 1} \frac{-1}{z^n}$.

3) $f(z) = \dfrac{1}{z-6}$; $z_0 = 4$

f est holomorphe sur la couronne $\mathcal{C}(4,2,+\infty) = \{z / 2 < |z-4|\}$.

Pour tout $z \in \mathcal{C}(4,2,+\infty)$, on a :

$$\frac{1}{z-6} = \frac{1}{(z-4)-2} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z-4}{2}}$$ Posons : $w := \dfrac{z-4}{2}$.

$$\frac{1}{z-6} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{1-w} \qquad |w| = \left|\frac{z-4}{2}\right|$$

$$\frac{1}{1-w} = \frac{\frac{1}{w}}{\frac{1}{w}-1} = \frac{-1}{w}\,\frac{1}{1-\frac{1}{w}} = \frac{-1}{w}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{w}\right)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{-1}{w^{n+1}} = \sum_{n\geq 1}\frac{-1}{w^n}.$$

Donc : $$\frac{1}{z-6} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{-1}{w^n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{w^n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{z-4}\right)^n = \sum_{n\geq 1}\frac{2^{n-1}}{(z-4)^n}.$$

Donc, le développement de Laurent de f en 4 est :

$$f(z) = \frac{1}{z-6} = \sum_{n\geq 1}\frac{2^{n-1}}{(z-4)^n} \quad \forall z \in \mathcal{C}(4,2,+\infty).$$

4) $f(z) = \dfrac{3z^2-2z+4}{z-6}$; $z_0 = 4$

f est holomorphe sur la couronne $\mathcal{C}(4,2,+\infty)$.

Comme le degré du numérateur et plus grand que le degré du dénominateur, la première étape consiste à faire une division euclidienne :

$$\frac{3z^2-2z+4}{z-6} = 3z+16+\frac{100}{z-6}.$$

$$3z+16 = 3(z-4)+28.$$

La deuxième étape est de calculer le développement de Laurent du reste $\frac{100}{z-6}$ sur $\mathcal{C}(4,2,+\infty)$.

Et d'après 4), on a :

$$\frac{100}{z-6} = 100\sum_{n\geq 1}\frac{2^{n-1}}{(z-4)^n} \quad \forall z\in\mathcal{C}(4,2,+\infty).$$

Donc, le développement de Laurent de f en 4 sur $\mathcal{C}(4,2,+\infty)$ est :

$$f(z) = \frac{3z^2-2z+4}{z-6} = 3(z-4)+28+\sum_{n\geq 1}\frac{2^{n+1}\cdot 5^2}{(z-4)^n}.$$

Exercice 10. Il s'agit alors de :

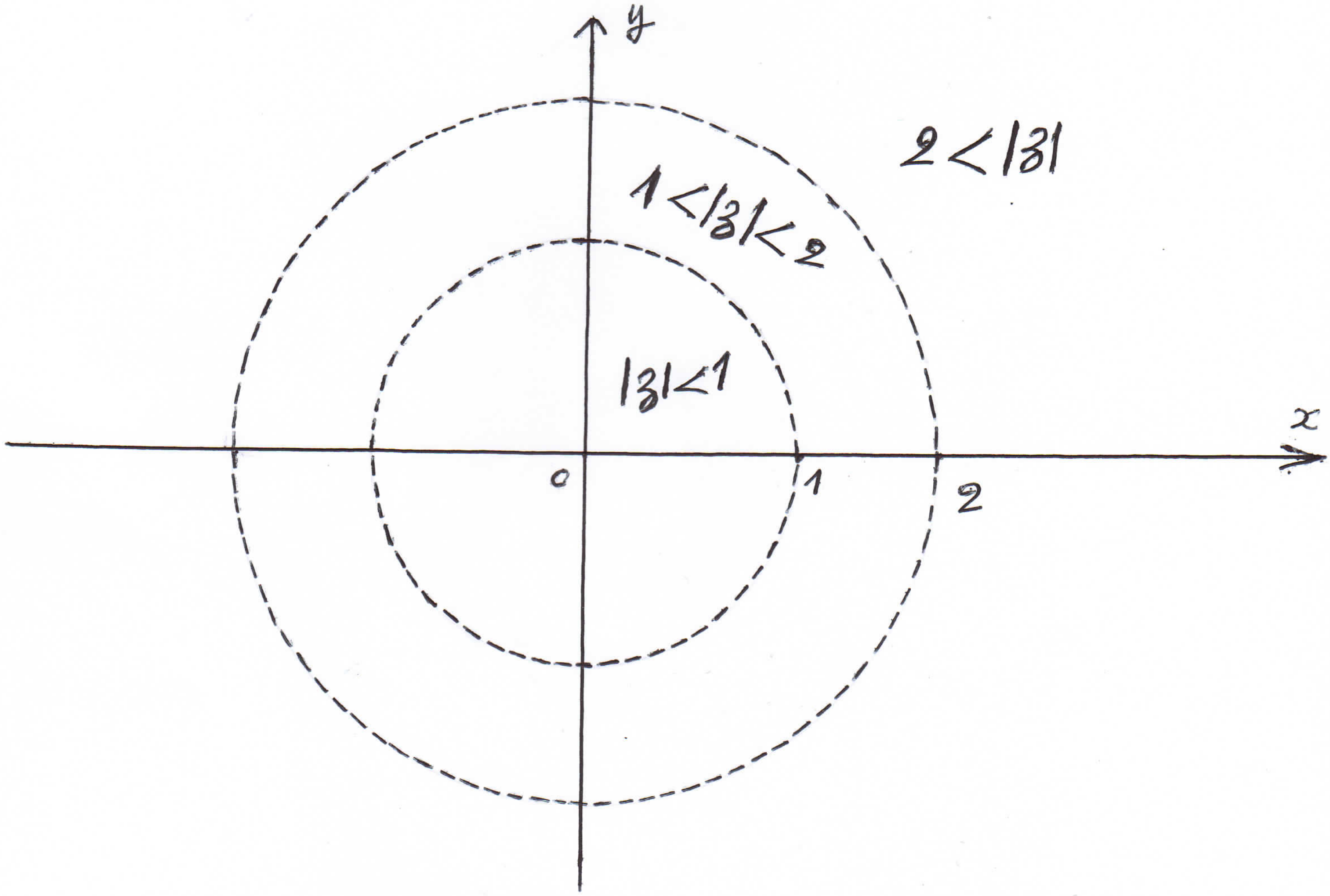
1- Chercher combien de développements de Laurent de f en 0 existent ?

2- Calculer ces développements de Laurent.

Pour répondre au premier problème, on doit chercher la plus grande couronne centrée en 0 sur laquelle f est holomorphe.

Il est évident que f est holomorphe en tout point de $\mathbb{C}$ sauf -1 et 2. Et alors f est holomorphe sur

$$\{z \,/\, |z|<1\} \cup \{z \,/\, 1<|z|<2\} \cup \{z \,/\, 2<|z|\}$$



- Puisque la première partie $\{z \,/\, |z|<1\}$ est une boule, le développement de Laurent sur cette partie coïncide avec le développement de Taylor, c.à.d : On n'a pas de puissances négatives.

Donc, on a 3 développements de Laurent différents de f en 0, dont l'un est un développement de Taylor. Cherchons alors à exprimer les développements.

$$\frac{3}{(1+z)(2-z)} = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2-z} .$$

- Sur $B(0,1)$, on a :

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n .$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}} .$$

Et alors, on a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right] z^n \quad \forall z \in B(0,1) .$$

- Sur $\mathcal{C}(0,1,2)$, on a :

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} .$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Et alors, on a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,1,2) .$$

• Sur $\mathcal{C}(0,2,+\infty)$, on a :

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-1}{z}\right)^{n} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{z^{n}}$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{\left(\frac{2}{z}\right)-1} = \frac{-1}{z}\,\frac{1}{1-\left(\frac{2}{z}\right)} = \frac{-1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{z}\right)^{n}$$

$$= -\sum_{n\geq 1}\frac{2^{n-1}}{z^{n}}.$$

Et alors, on a :

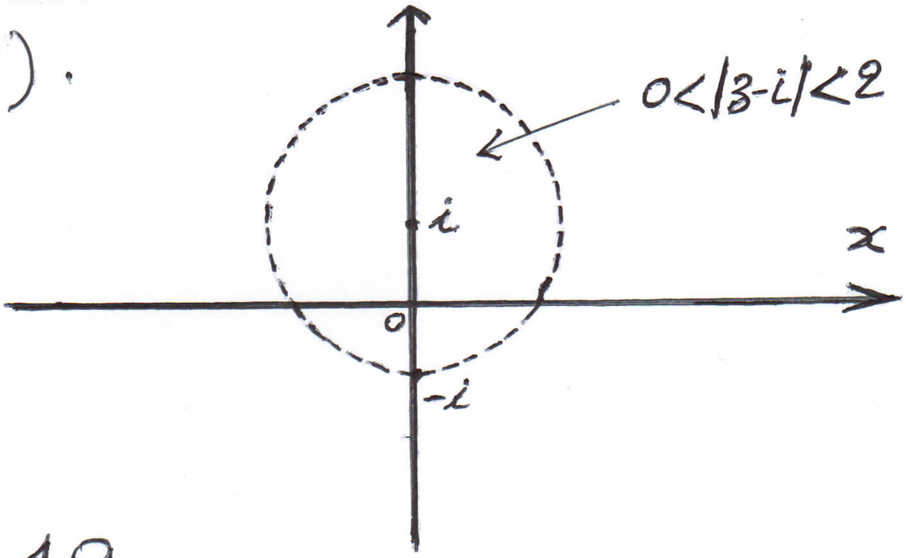
$$f(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{z^{n}} - \sum_{n\geq 1}\frac{2^{n-1}}{z^{n}}$$

$$\Rightarrow\ f(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}-2^{n-1}}{z^{n}} \quad \forall z\in\mathcal{C}(0,2,+\infty).$$

__Exercice 11.__ La fonction $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ est holomorphe en tout point de $\mathbb{C}$ sauf $-i$ et i.

Elle a un développement de Laurent en i sur la plus grande couronne centrée en i.

Pour éviter la singularité isolée $-i$, cette couronne est donc $\mathcal{C}(i,0,2)$.



Pour tout $z \in \mathcal{C}(i,0,2)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z-i}\,\frac{1}{z+i}.$$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{2i}\right)}$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n \qquad \left(\left|\frac{z-i}{2i}\right|<1\right)$$

Donc, $\displaystyle \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z-i}\,\frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$

Et alors, on a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1} \quad \forall z \in \mathcal{C}(i,0,2).$$

<u>Exercice 12:</u> Pour tout $z \in \mathcal{C}(0,1,+\infty)$, on a :

$$\frac{1}{1-z} = -\sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^n} \Rightarrow \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^n}\right)'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 1} n\,\frac{1}{z^{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \left(\sum_{n\geq} n\,\frac{1}{z^{n+1}}\right)'$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1-z)^3} = -\sum_{n\geq 1} n(n+1)\frac{1}{z^{n+2}}.$$

Et alors, on a :

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} n(n+1)\frac{1}{z^{n+2}} \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,1,+\infty).$$

Exercice 13. 1) $f(z) = \frac{1}{1+z}$; $\mathcal{C}(0,1,+\infty)$.

Pour tout $z \in \mathcal{C}(0,1,+\infty)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{-1}{z}\right)^n \quad \left(\left|\frac{1}{z}\right|<1\right).$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,1,+\infty).$$

2) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $\mathcal{C}(0,1,+\infty)$.

Pour tout $z \in \mathcal{C}(0,1,+\infty)$, on a :

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{-1}{z^2}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{-1}{z^2}\right)^n = \frac{1}{z^2} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{z^{2n}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,1,+\infty).$$

3) $f(z) = z + \frac{1}{z}$; $\mathcal{C}(1,1,+\infty)$.

Pour tout $z \in \mathcal{C}(1,1,+\infty)$, on a :

$$z + \frac{1}{z} = 1 + (z-1) + \frac{1}{1+(z-1)} = 1 + (z-1) + \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}$$

$$= 1 + (z-1) + \frac{1}{z-1} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(z-1)^n}$$

$$\Rightarrow f(z) = 1 + (z-1) + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} \quad \forall z \in \mathcal{C}(1,1,+\infty).$$

4) $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)(z+3)}$; $\mathcal{C}(0,2,3)$.

$$\frac{z}{(z+2)(z+3)} = \frac{-2}{z+2} + \frac{3}{z+3}$$

- Sur $\mathcal{C}(0,2,+\infty)$, on a :

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-2}{z}\right)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

- Sur $\mathcal{C}(0,0,3)$, on a :

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-z}{3}\right)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Et alors sur $\mathcal{C}(0,2,3)$, on a :

$$\frac{z}{(z+2)(z+3)} = \frac{-2}{z+2} + \frac{3}{z+3}$$

$$= -2\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}} + 3\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Donc : $$f(z) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2^n}{z^n} + \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}$$

$\forall z \in \mathcal{C}(0,2,3)$.

5) $f(z) = \dfrac{z^2+(1-i)z+2}{(z-i)(z+2)}$; $\mathcal{C}(0,1,2)$.

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z-i} - \frac{2}{z+2}$$

Pour tout $z \in \mathcal{C}(0,1,2)$, on a $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ et $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$; et alors on a :

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{i}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{i^n}{z^{n+1}} = \sum_{n\geq 1}\frac{i^{n-1}}{z^n}$$

$$\frac{2}{z+2} = \frac{2}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{-z}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n .$$

Donc : $$f(z) = 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{i^{n-1}}{z^n} + \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,1,2).$$

<u>Exercice 14</u>. La fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+i)}$ a des singularités isolées en 1 et $-i$.

- Si on commence par le centre $z_0 = -1$, la plus proche singularité isolée est $-i$ et sa distance à $z_0 = -1$ est $\sqrt{2}$. Donc, f est holomorphe sur $B(z_0, \sqrt{2})$. C'est l'une des séries de Laurent que nous cherchons.
- En se déplaçant à l'extérieur de cette boule, on rencontre la seconde singularité 1. Donc, f est

holomorphe sur la couronne $\mathcal{C}(-1, \sqrt{2}, 2)$ et possède un développement de Laurent sur cette couronne.

- Finalement, f est holomorphe sur la couronne $\mathcal{C}(-1, 2, +\infty)$, et alors elle possède un développement de Laurent sur cette couronne.

Maintenant, cherchons les séries de Laurent correspondants.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)} = \frac{1}{2}\,\frac{1-i}{z-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1-i}{z+i}$$

* Sur $B(-1, \sqrt{2})$, on a :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{-2+(z+1)} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}$$

$$= \frac{-1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n \quad \left(\left|\frac{z+1}{2}\right|<1\right).$$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(i-1)+(z+1)} = \frac{-1}{1-i}\,\frac{1}{1-\frac{z+1}{1-i}}$$

$$= \frac{-1}{1-i}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z+1}{1-i}\right)^n \quad \left(\left|\frac{z+1}{1-i}\right|<1\right)$$

Et alors, on a :

$$f(z) = -\frac{1-i}{4}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z+1}{1-i}\right)^n \quad \forall z\in B(-1,\sqrt{2})$$

$*$ Sur $\mathcal{C}(-1, \sqrt{2}, 2)$, on a :

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(i-1)+(z+1)} = \frac{1}{z+1}\,\frac{1}{1-\frac{1-i}{z+1}}$$

$$= \frac{1}{z+1}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1-i}{z+1}\right)^n \qquad \left(\left|\frac{1-i}{z+1}\right|<1\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{(1-i)^n}{(z+1)^{n+1}} = \frac{1}{1-i}\sum_{n\geq 1}\frac{(1-i)^n}{(z+1)^n}.$$

Et alors, on a :

$$f(z) = -\frac{1-i}{4}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n - \frac{1-i}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(1-i)^n}{(z+1)^{n+1}} \quad \forall z \in \mathcal{C}(-1, \sqrt{2}, 2).$$

$*$ Sur $\mathcal{C}(-1, 2, +\infty)$, on a :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{-2+(z+1)} = \frac{1}{z+1}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}} = \frac{1}{z+1}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{(z+1)^n}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1-i}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{(z+1)^{n+1}} - \frac{1-i}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(1-i)^n}{(z+1)^{n+1}}$$

Donc : $$f(z) = \frac{1-i}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{(z+1)^n} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(1-i)^n}{(z+1)^n} \quad \forall z \in \mathcal{C}(-1, 2, +\infty)$$

<u>Exercice 15.</u> 1) $f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2z}$, $z_0 = 0$.

Au voisinage de z_0, on a :

$$e^z = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-z} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} z^n = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2z}\left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\right]$$

Donc, le développement en série de Laurent de f au voisinage de $z_0 = 0$ est :

$$f(z) = 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

Et $z_0 = 0$ est une singularité éliminable de f.

2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$, $z_0 = 0$

Au voisinage de $z_0 = 0$, on a :

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

Donc, le développement en série de Laurent de f au voisinage de $z_0 = 0$ est :

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - \cdots$$

Et $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 2 de f.

3) $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$; $z_0 = 0$

Au voisinage de $z_0 = 0$, on a :

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \cdots$$

Donc, le développement en série de Laurent de f au voisinage de $z_0 = 0$ est :

$$f(z) = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^4} + \cdots$$

Comme la partie principale de ce développement comporte une infinité de termes, $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de f.

Exercice 16. Dans cet exercice, l'idée est d'évaluer l'intégral complexe en intégrant la série de Laurent terme à terme. Cela est justifiable car la série de Laurent est absolument et uniformément convergente sur tout fermé et borné dans le domaine de convergence de la série de Laurent (Cours).

Comme les chemins considérés dans cet exercice sont fermés et bornés, alors la série de Laurent converge uniformément sur ces chemins, et alors on peut intégrer la série de Laurent terme à terme.

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}(0,1)} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)} dz$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{\mathcal{C}(0,1)} z^{-(2n+1)} dz$$

Rappel : Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\int_\gamma z^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } m = -1 \\ 0 & \text{si } m \neq -1 \end{cases}$$

où γ est un chemin simple fermé orienté dans le sens direct et contenant 0 comme point intérieur.

Alors, on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} z^{-(2n+1)} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Donc : $\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i$.

2) On suit la même stratégie de 1). Alors, on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,4)} \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{z}\right) dz = \int_{\mathcal{C}(0,4)} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{1}{z^n} \right) dz$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{\mathcal{C}(0,4)} \frac{1}{z^n}\, dz$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}(0,4)} \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i .$$

<u>Exercice 17.</u> 1) La fonction $f(z) := \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z}$ est continue sur $\mathcal{C}(0,1)$ et alors l'intégrale existe.

Cependant, on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy pour calculer l'intégrale car f admet une singularité isolée en $z_0 = 0$ qui se trouve à l'intérieur de $\mathcal{C}(0,1)$.

Alors, l'idée est de chercher le développement de Laurent de f en 0 puis intégrer terme à terme.

Pour tout $z \in \mathcal{C}(0,0,1)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}(0,1)} g(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n+1}} \right) dz$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{z^{n+1}}$$

Or $\forall n \geq 1 \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{z^{n+1}} = 0$ et $\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} d(e^{it}) = 2\pi i$

Donc : $\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} dz = 2\pi i$.

2) Tout ce qu'on a dit pour f est valable aussi pour $g(z) := e^{z+\frac{1}{z}}$. Pour tout $z \in \mathcal{C}(0,0,+\infty)$, on a :

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = e^z + \sum_{n\geq 0} \frac{e^z}{(n+1)!\, z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}(0,1)} e^{z+\frac{1}{z}} dz = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \left[e^z + \sum_{n\geq 0} \frac{e^z}{(n+1)!\, z^{n+1}} \right] dz$$

$$= \int_{\mathcal{C}(0,1)} e^z dz + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)!} \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz$$

Comme e^z est holomorphe sur et à l'intérieur de $\mathcal{C}(0,1)$, d'après le théorème de Cauchy, $\int_{\mathcal{C}(0,1)} e^z dz = 0$.

Et d'après la formule de Cauchy, on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\,\varphi^{(n)}(0), \quad \text{où } \varphi(z) := e^z.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

Et alors, on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} e^{z+\frac{1}{z}}\,dz = 2\pi i \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!\,(n+1)!}.$$

Exercice 18. 1) $f(z) = \dfrac{1+z}{z} = \dfrac{1}{z} + 1$.

Il est clair que f a un pôle simple en $z_0 = 0$.

Le coefficient a_{-1} de la série de Laurent de f en $z_0 = 0$ est égal à 1. Donc : $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$.

2) $g(z) = \left(\dfrac{z-1}{z+3i}\right)^3$. g a un pôle d'ordre 3 en $z_0 = -3i$.

$$g(z) = \left(\frac{1}{z+3i}\right)^3 \left[(z+3i) + (-3i-1)\right]^3$$

$$= \frac{1}{(z+3i)^3}\left[(z+3i)^3 + 3(z+3i)^2(-1-3i) + 3(z+3i)(-1-3i)^2 + (3i-1)^3\right]$$

$$= 1 + 3\,\frac{-1-3i}{z+3i} + 3\,\frac{(-1-3i)^2}{(z+3i)^2} + \frac{(-1-3i)^3}{(z+3i)^3}$$

Donc : $\operatorname{Res}(g, -3i) = 3(-1-3i)$.

3) $R(z) = \dfrac{1}{\sin(\pi z)} \dfrac{z+1}{z-1}$.

R a un pôle simple en $z_k = k$ $(k \neq 1)$ et un pôle double en $z_1 = 1$.

• Soit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$.

$$\mathrm{Res}(R,k) = \lim_{z \to k} (z-k) R(z) = \lim_{z \to k} (z-k) \frac{1}{\sin(z\pi)} \frac{z+1}{z-1}$$

$$= \lim_{z \to k} \frac{z+1}{z-1} \lim_{z \to k} \frac{z-k}{\sin(z\pi)}$$

$$= \frac{k+1}{k-1} \lim_{z \to k} \frac{1}{\pi \cos(z\pi)} \quad \text{(règle de l'Hôpital)}$$

$$= \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\pi \cos(k\pi)} = \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\pi(-1)^k}$$

Donc : $$\mathrm{Res}(R,k) = \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{k+1}{k-1}.$$

• Pour $z_1 = 1$, on a :

$$R(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)} \frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{\sin(\pi z)} \frac{(z-1)+2}{z-1}$$

$$= \frac{1}{\sin(\pi z)} + \frac{2}{(z-1)\sin(\pi z)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(R,1) = \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, 1\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{2}{(z-1)\sin(\pi z)}, 1\right)$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, 1\right) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1}{\sin(\pi z)} = \frac{-1}{\pi}$$

$$\text{Res}\left(\frac{2}{(z-1)\sin(\pi z)}, 1\right) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{2(z-1)}{\sin(\pi z)}\right]$$

$$= 2 \lim_{z\to 1} \frac{\sin(\pi z) - (z-1)\cos(\pi z)}{\sin^2(\pi z)}$$

$$= 2 \lim_{z\to 1} \frac{\pi\cos(\pi z) - \pi\cos(\pi z) + (z-1)\pi\sin(\pi z)}{2\pi\sin(\pi z)\cos(\pi z)}$$

$$= 0$$

Donc : $\text{Res}(h,1) = \frac{-1}{\pi}$.

4) $k(z) = \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{z^3(1-z^2)}$.

Les singularités isolées de k sont :

$z_0 = 0$ un pôle d'ordre 3,

$z_1 = -1$ et $z_2 = 1$ des pôles d'ordre 1.

Et alors, on a :

- $\text{Res}(k,0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 k(z)\right] = 1$.
- $\text{Res}(k,-1) = \lim_{z\to -1} (z+1)k(z) = \frac{-1}{2}$.
- $\text{Res}(k,1) = \lim_{z\to 1} (z-1)k(z) = \frac{-1}{2}$.

5) $l(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

ℓ a une singularité isolée en $z_0 = -1$ qui est un pôle d'ordre n. Et alors, on a :

$$\operatorname{Res}(\ell, -1) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to -1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z+1)^n \ell(z) \right]$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}.$$

6) $m(z) = \dfrac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}$. Les singularités isolées de m sont :

$z_0 = 0$ un pole double et $z_1 = 1$ un pôle simple.

Et alors, on a :

- $\operatorname{Res}(m, 0) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{d}{dz}\left[z^2 m(z) \right] = 0$
- $\operatorname{Res}(m, 1) = \lim\limits_{z \to 1} (z-1) m(z) = 1$

7) $n(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. Les singularités isolées de n sont :

$z_0 = 0$ un pôle double ; $z_1 = -3i$ et $z_2 = 3i$ des pôles simples.

Et alors, on a :

- $\operatorname{Res}(n, 0) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{d}{dz}\left[z^2 n(z) \right] = \dfrac{1}{9}$.
- $\operatorname{Res}(n, -3i) = \lim\limits_{z \to -3i} (z+3i) n(z) = \dfrac{-1}{54}(\sin 3 + i \cos 3)$.
- $\operatorname{Res}(n, 3i) = \lim\limits_{z \to 3i} (z-3i) n(z) = \dfrac{-1}{54}(\sin 3 - i \cos 3)$.

Exercice 19. 1) $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$

f possède -1 comme pôle double et $\mp 2i$ comme pôles simples. Et alors, on a :

- $Res(f,-1) = \lim\limits_{z\to -1} \dfrac{d}{dz}\left[(z+1)^2 f(z)\right] = \dfrac{-14}{25}$.

- $Res(f,-2i) = \lim\limits_{z\to -2i} (z+2i)f(z) = \dfrac{7-i}{25}$.

- $Res(f,2i) = \lim\limits_{z\to 2i} (z-2i)f(z) = \dfrac{7+i}{25}$.

2) $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ $\quad \sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

Donc, f admet une infinité de pôles doubles $z_k = k\pi \, (k\in\mathbb{Z})$

Soit $k\in\mathbb{Z}$, on a :

$$Res(f,z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{d}{dz}\left[(z-z_k)^2 f(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to z_k} \frac{d}{dz}\left[(z-k\pi)\frac{e^z}{\sin^2 z}\right]$$

$$= \lim_{z\to k\pi} \frac{e^z\left[(z-k\pi)^2\sin z + 2(z-k\pi)\sin z - 2(z-k\pi)^2\cos z\right]}{\sin^3 z}$$

Posons : $u := z-k\pi$. Alors, on a :

$$Res(f,k\pi) = \lim_{u\to 0} e^{u+k\pi}\frac{u^2\sin u + 2u\sin u - 2u^2\cos u}{\sin^3 u}$$

$$= e^{k\pi} \lim_{u \to 0} \frac{u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u}{\sin^3 u}$$

$$= e^{k\pi} \lim_{u \to 0} \left(\frac{u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u}{u^3} \quad \frac{u^3}{\sin^3 u} \right)$$

$$= e^{k\pi} \lim_{u \to 0} \frac{u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u}{u^3}$$

En utilisant plusieurs fois la règle de l'Hôpital, on trouve :

$$\text{Res}(f, k\pi) = e^{k\pi}.$$

<u>Autre méthode</u> : Cette méthode consiste à développer $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ en série de Laurent dans le voisinage de $z_k = \pi k$ et chercher le coefficient de $\dfrac{1}{z - k\pi}$ qui est le résidu demandé.

Posons : $u := z - k\pi \iff z = u + k\pi$.

On doit alors développer la fonction en série de Laurent dans le voisinage de $u = 0$; la fonction considérée prend alors la forme :

$$\frac{e^{k\pi + u}}{\sin^2(k\pi + u)} = \frac{e^{k\pi} e^{u}}{\sin^2 u}.$$

A l'aide des développements de Taylor de e^u et $\sin u$, on trouve par division :

$$\frac{e^{k\pi}e^u}{\sin^2 u} = \frac{e^{k\pi}\left(1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots\right)}{\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+\cdots\right)^2}$$

$$= \frac{e^{k\pi}\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\cdots\right)}{u^2\left(1-\frac{u^2}{6}+\frac{u^4}{120}+\cdots\right)^2}$$

$$= \frac{e^{k\pi}\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\cdots\right)}{u^2\left(1-\frac{u^2}{3}+\frac{2}{45}u^4+\cdots\right)}$$

$$= e^{k\pi}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{6}\frac{u}{3}+\cdots\right)$$

Donc : $\operatorname{Res}(f, k\pi) = e^{k\pi}$.

Exercice 20. On va chercher le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans la série de Laurent en 0 associée à f.

$$f(z) = \frac{\operatorname{cotg} z \cdot \operatorname{coth} z}{z^3} = \frac{\cos z \cdot \operatorname{ch} z}{z^3 \sin z \cdot \operatorname{sh} z}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)}{z^3\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)}$$

$$= \frac{1-\frac{z^4}{4}+\cdots}{z^5\left(1-\frac{z^4}{90}+\cdots\right)} = \frac{1}{z^5}\left(1-\frac{7}{45}z^4+\cdots\right)$$

Donc : $\operatorname{Res}\left(\frac{\cotg z \cdot \coth z}{z^3}, 0\right) = \frac{-7}{45}$.

<u>Exercice 21</u>. 1) Si z_0 est un zéro d'ordre m de f, il existe φ une fonction holomorphe sur un voisinage V de z_0 telle que : $f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$ $\forall z \in V$, avec $\varphi(z_0) \neq 0$.

Alors, on a : $f'(z) = m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z-z_0)^m \varphi'(z)$ $\quad \forall z \in V$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z-z_0)^m\varphi'(z)}{(z-z_0)^m \varphi(z)} \quad \forall z \in V.$$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{m}{z-z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \quad \forall z \in V$$

Donc, z_0 est un pôle simple de g.

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(g, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) g(z) \Rightarrow \operatorname{Res}(g, z_0) = m.$$

<u>Résultat</u> : Si z_0 est un zéro d'ordre m de f, alors $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = m$.

2) Si z_0 est un pôle d'ordre m de f, z_0 est un zéro d'ordre m de $\frac{1}{f}$. Et alors, il existe φ une fonction holomorphe sur V un voisinage de z_0 telle que :

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \varphi(z) \quad \forall z \in V, \text{ avec } \varphi(z_0) \neq 0.$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m \varphi(z)} \quad \forall z \in V \setminus \{z_0\} := W.$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{-m\varphi(z) - (z-z_0)\varphi'(z)}{(z-z_0)^{m+1}\varphi(z)^2}.$$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{-m\varphi(z) - (z-z_0)\varphi'(z)}{(z-z_0)^{m+1}\varphi(z)^2}(z-z_0)^m \varphi(z) \quad \forall z \in W.$$

$$= \frac{-m}{z-z_0} - \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \quad \forall z \in W.$$

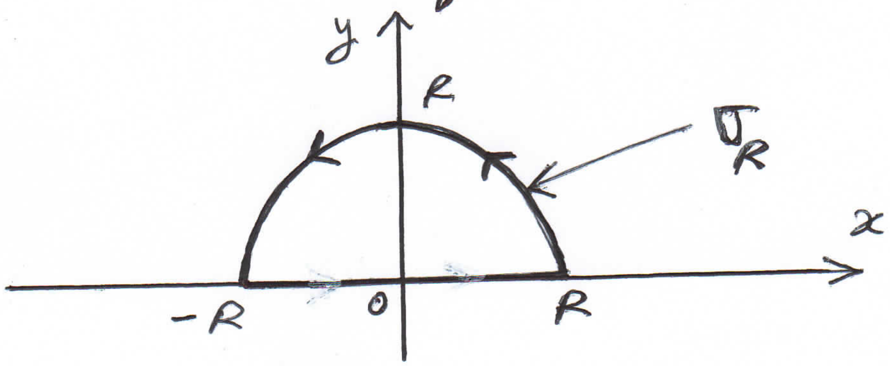
$\Rightarrow$ z_0 est un pôle simple de g

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(g, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)\, g(z)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(g, z_0) = -m.$$

<u>Résultat</u> : Si z_0 est un pôle d'ordre m de f, alors $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = -m$.

<u>Exercice 23.</u>



Pour tout $R > 0$ soit $I_R := \int_{\gamma_R} e^{imz} f(z)\, dz$.

$$|I_R| = \left| \int_0^{\pi} e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\, d\theta \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left| e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta} \right| d\theta$$

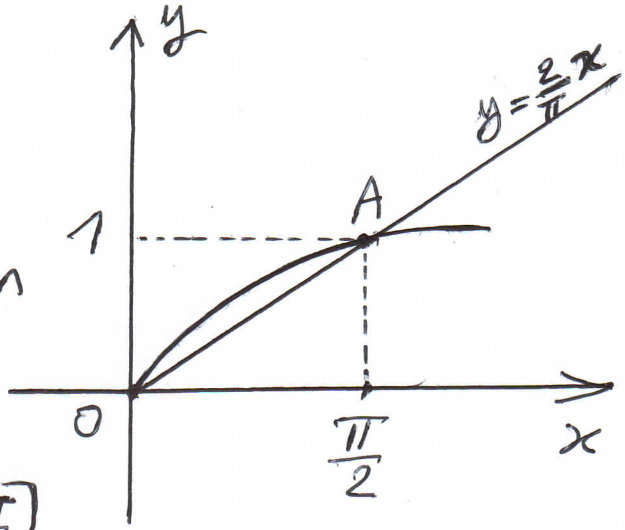
$$\leq \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} \left| f(Re^{i\theta}) \right| R\, d\theta$$

$$\leq \frac{RM}{R^k} \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta$$

$$\leq \frac{M}{R^{k-1}} \left[\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta}_{1} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\cos\theta}\, d\theta}_{2} \right]$$

La fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Et alors la courbe de la fonction sin est au dessus de la corde (OA) qui est la droite d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$. Donc on a :



$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x \quad \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Et alors, $(1) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\frac{2}{\pi}\theta}\, d\theta$

$$\leq \frac{1}{-mR\frac{2}{\pi}}\left[e^{-mR\frac{2}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\leq \frac{\pi}{2mR}\left(1-e^{-mR}\right)$$

- Sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos\theta-\theta$ est une fonction décroissante

$\Rightarrow \quad 1 \geq \cos\theta-\theta \quad \forall\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \quad 1+\theta \geq \cos\theta \quad \forall\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$

Et alors, on a :

$(2) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR(1+\theta)}\, d\theta$

$$\leq e^{-mR}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\theta}\, d\theta$$

$$\leq \frac{e^{-mR}}{-mR}\left[e^{-mR\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\leq \frac{e^{-mR}}{mR}\left(1-e^{-mR\frac{\pi}{2}}\right)$$

Donc : $|I_R| \leq \frac{M}{R^{k-1}}\left[\frac{\pi}{2mR}\left(1-e^{-mR}\right)+\frac{e^{-mR}}{mR}\left(1-e^{-mR\frac{\pi}{2}}\right)\right]$

$$\Rightarrow |I_R| \leq \frac{M}{mR^k}\left[\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-mR}\right)+e^{-mR}\left(1-e^{-mR\frac{\pi}{2}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} |I_R| = 0.$$

Donc : $$\lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_R} e^{imz} f(z)\,dz = 0.$$

Exercice 22. 1) Posons : $f(z) := \dfrac{(1+z)^m}{z^{k+1}}$.

f admet un seul pôle $z_0 = 0$ qui est d'ordre $(k+1)$.
Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, et puisque 0 est un point intérieur à γ, on a :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,0).$$

Pour calculer $\mathrm{Res}(f,0)$, on va chercher le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de Laurent de f au voisinage de 0.

$$f(z) = \frac{1}{z^{k+1}}(1+z)^m = \frac{1}{z^{k+1}}\sum_{p=0}^{m} C_m^p z^p$$

$$= \sum_{p=0}^{m} C_m^p z^{p-k-1}. \qquad p-k-1=-1 \Leftrightarrow p=k.$$

Donc, le coefficient dans le développement de Laurent de f au voisinage de 0 est C_m^k.

$$\Rightarrow \quad Res(f,0) = C_m^k \quad \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, C_m^k .$$

Donc : $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(1+z)^m}{z^{k+1}}\,dz = C_m^k .$$

2) D'après 1) pour tout lacet γ contenant 0 comme point intérieur, on a :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(1+z)^{2m}}{z^{m+1}}\,dz = C_{2m}^m .$$

Prenons $\gamma := \mathcal{C}(0,1)$ et $$I = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{(1+z)^{2m}}{z^{m+1}}\,dz .$$

$$|I| \leq L(\mathcal{C}(0,1)) \sup_{z\in\mathcal{C}(0,1)} \left|\frac{(1+z)^{2m}}{z^{m+1}}\right|$$

Soit $z \in \mathcal{C}(0,1)$, il existe $t \in [0,2\pi]$ tel que : $z = e^{it}$.

$$\left|\frac{(1+z)^{2m}}{z^{m+1}}\right| = \frac{|1+e^{it}|^{2m}}{|e^{it}|^{m+1}} \leq 2^{2m} .$$

Donc : $|I| \leq 2\pi .\, 2^{2m} = 2\pi . 4^m$.

Et alors, on a : $C_{2n}^{n} \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \cdot 4^{n}$

$$\Rightarrow \quad C_{2n}^{n} \leq 4^{n}.$$

3) D'après 1), on a :

$$C_{2n}^{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} \, dz .$$

Pour tout lacet γ contenant 0 comme point intérieur.

Et alors, on a :

$$\sum_{n\geq 0} C_{2n}^{n} \frac{1}{7^{n}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n\geq 0} \int_{\gamma} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1} \cdot 7^{n}} \, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n\geq 0} \int_{\gamma} \frac{(1+z)^{2n}}{(7z)^{n}} \frac{dz}{z} .$$

Alors, si on prend $\gamma = \mathcal{C}(0,1)$, on aura :

$$\left| \frac{(1+z)^{2}}{7z} \right| \leq \frac{2^{2}}{7} = \frac{4}{7} \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,1) .$$

Donc, la série $\sum_{n\geq 0} \left[\frac{(1+z)^{2}}{7z} \right]^{n}$ converge uniformément sur $\mathcal{C}(0,1)$. Et alors, on a :

$$\sum_{n\geq 0}\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{(1+z)^{2n}}{(7z)^n}\frac{dz}{z} = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \sum_{n\geq 0} \frac{(1+z)^{2n}}{(7z)^n}\frac{dz}{z}$$

$$= \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{1}{1-\frac{(1+z)^2}{7z}}\frac{dz}{z} = 7\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{1}{-z^2+5z-1}\,dz .$$

Posons : $g(z) := \dfrac{1}{-z^2+5z-1}$. Les pôles de g sont :

$$z_1 = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5+\sqrt{21}}{2} .$$

Seul le pôle z_1 est à l'intérieur de $\mathcal{C}(0,1)$; et alors on a : $\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} g(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(g, z_1)$.

Et comme z_1 est un pôle simple de g, on a :

$$\mathrm{Res}(g,z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)g(z) = \frac{-1}{z_1-z_2} = \frac{1}{\sqrt{21}} .$$

$$\left(\text{car } g(z) = \frac{1}{-z^2+5z-1} = \frac{-1}{(z-z_1)(z-z_2)}\right)$$

Donc : $\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} g(z)\,dz = \frac{2\pi i}{\sqrt{21}}$. Et alors, on a :

$$\sum_{n\geq 0} C_{2n}^{n}\frac{1}{7^n} = \frac{1}{2\pi i}\,7\,\frac{2\pi i}{\sqrt{21}} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} C_{2n}^{n}\frac{1}{7^n} = \frac{7}{\sqrt{21}} .$$