Université My Ismail
Facultée des Sciences
Département de Mathématiques
et Informatique

Annéee universitaire 19-20
Filière : Math. Fondamentales
Algèbre 7 (S_6)

Série 1.

Exercice 1 :

a) Montrer que tout sous groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

b) Montrer que si d divise n, il existe un unique sous groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d.

c) Soit G un groupe, Z son centre. On suppose que G/Z est monogéne. Montrer que G est abélien. En déduire que tout groupe d'ordre p^2, avec p premier, est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

d) Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, montrer que :

$$p.g.c.d.(n,m) = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$$

La réciproque est elle vraie ?

e)Montrer que :

$$\begin{aligned} \overline{x} \text{ engendre } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\iff p.g.c.d.(n,x) = 1 \\ &\iff \overline{x} \in \cup(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

On note $\varphi(n)$ le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, φ est appelée l'indicateur d'Euler. Soit $n \geq 2$. Montrer que :

f) n est premier $\Leftrightarrow \varphi(n) = n-1$.

g) p premier $\Leftrightarrow \varphi(p^m) = (p-1)p^{m-1}$.

h) $p.g.c.d.(n,m) = 1 \Leftrightarrow \varphi(nm) = \varphi(n).\varphi(m)$.

i) Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, où les p_i sont premiers et deux à deux distincts, alors

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

j) Si d divise n, $\varphi(d)$ est le nombre d'éléments d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

k) $\sum_{d/n} \varphi(d) = n$

l)

i) (Théorème d'Euler) :
Soit $a \in \mathbb{Z}^*$ avec $p.g.c.d.(a,n) = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (mod\, n)$

ii) (Théorème de Fermat).
On suppose p premier et $a \in \mathbb{Z}$, alors $a^p \equiv a \ \ (mod\, p)$

Exercice 2 :

1. **Déterminer les sous groupes de** $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, n \in \mathbb{N}^*$

2. **Soient** $p, n \in \mathbb{N}^*$ **tels que** p **divise** n. **Montrer que les groupes** $\dfrac{\mathbb{Z}}{\frac{n}{p}.\mathbb{Z}}$ **et** $\dfrac{p\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ **sont isomorphes.**

3. **Montrer que si** d **divise** n, **alors il existe un et un seul sous-groupe de** $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ **d'ordre** d.

4. a) **Soit** G **un groupe cyclique d'ordre** n **noté multiplicativement. Montrer que pour tout diviseur** d **de** n, G **admet un sous-groupe d'ordre** d **et un seul.**

   b) **Soit** a **un générateur de** G. **Quel est l'ordre de** $a^k, 0 < k < n$.

   c) **Montrer que pour tout diviseur** d **de** n, **les** $x \in G$ **tels que** $x^d = e$ **sont en ordre** d.

   d) **Soit** d **un diviseur de** n. **Montrer que pour qu'un élément** $x \in G$ **puisse s'écrire sous la forme** y^d **avec** $y \in G$, **il faut et il suffit que** $x^{\frac{n}{d}} = e$.

Exercice 3 :

i) **Si** H **et** K **sont deux groupes finis d'un groupe** G, **On pose** $H.K = \{hk/h \in H, k \in K\}$ **Montrer que** $card(H.K).card(H \cap K) = card(H).card(K)$.

ii) **Soit** G **un groupe fini d'orere** pq, **où** p **premier et** $p > q$. **Montrer que** G **a au plus un sous groupe d'ordre** p **et en déduire que ce sous groupe (s'il existe) est distingué.**

Exercice 4 :

Soient A **et** B **deux sous groupes d'un groupe** G. **On pose** $AB = \{ab/a \in A, b \in B\}$. **On suppose** B **distingué.**

1. **Montrer que :**
   a) $AB = BA$ **; b)** AB **un sous groupe de** G **; c)** A **et** B **sont des sous groupes de** AB.

2. a) **Montrer que** $A \bigcap B$ **est un sous groupe distingué de** A

   b) **Montrer que les groupes** $A_{/A \bigcap B}$ **et** $AB_{/B}$ **sont isomorphes .**

Exercice 5 :

1. **Soit** G **un groupe,** H **et** F **deux sous groupes distingués de** G **tels que** $F \subseteq H$. **Montrer que :**

   i) $\dfrac{H}{F}$ **est un sous groupe distingué de** $\dfrac{G}{F}$.

   ii) **Les groupes** $\dfrac{\frac{G}{F}}{\frac{H}{F}}$ **et** $\dfrac{G}{H}$ **sont isomorphes.**

2. **Soit** $f : G \mapsto G'$ **un homomorphisme surjectif de groupes et soit** H' **un sous groupe distingué de** G'. **montrer que :**

i) $H = f^{-1}(H')$ est un sous groupe distingué de G.

ii) $\dfrac{G}{H}$ et $\dfrac{G'}{H'}$ sont isomorphe.

Exercice 6. Théorème des restes Chinois

I- Soit A un anneau commutatif et soient $a_1, \ldots, a_n$ des idéaux de A tels que $a_i + a_j = A$ pour tous $i, j = 1, \cdots, n$; $i \neq j$.

1. **Montrer que $\forall x_1, \cdots, x_n \in A, \exists x \in A$ tel que $x \equiv x_i (\mod a_i)$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$.**
2. **Soit**
$$f : A \to \prod_{i=1}^{n} A/a_i$$
l'application canonique. Montrer que $\ker f = \bigcap_{i=1}^{n} a_i$ et que f est surjective. En déduire que
$$A/\bigcap_{i=1}^{n} a_i \cong \prod_{i=1}^{n} A/a_i.$$

II- Soit n un entier > 1 et soit
$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i}$$
sa décomposition en facteurs premiers.

1. **Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{Z}/p^{r_i}\mathbb{Z}$. En déduire que**
$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \simeq \prod_{i=1}^{m} (\mathbb{Z}/p^{r_i}\mathbb{Z})^*$$
2. **Soit φ la fonction d'Euler : $\varphi(n) = \mid (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \mid$.**
   a) **Montrer que $\varphi_(n) = \prod_{i=1}^{m} \varphi(p_i^{r_i})$.**
   b) **Montrer que si p est un nombre premier alors $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$, pour tout entier $\alpha \geq 1$.**
   c) **En déduire que $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_m})$**

Exercice 7:

a) **Soit A un anneau et I un idéal bilatère de A. Soit $H = \{a \in \cup(A) / a - 1 \in I\}$.**
Montrer que H est un sous-groupe distingué de $\cup(A)$

b) **Soit $f : G \mapsto G'$ un homomorphisme de groupes et soit N un sous-groupe distingué de G'. Montrer que $f^{-1}(N)$ est un sous groupe distingué de G. En déduire qu'un groupe d'ordre p^n où p est premier, a des sous groupes distingués de tous les ordres p^i, avec $0 \leq i \leq n$.**

Exercice 8 :

a) Soit $\sigma = (a_1, \cdots, a_k)$ un k-cycle de S_n.

i) Vérifier que $\sigma = (a_1, a_2)(a_2, a_3)\cdots(a_{k-1}, a_k)$.

ii) En déduire que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$

b) Soit $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 & 7 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer σ_1^{50} et σ_2^{100}.

c) Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & n \\ n & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$

Décomposer σ en cycles disjoints et déterminer sa signature et son ordre.

Exercice 9 :

a) Si $\delta = (i_1, \cdots, i_k) \in S_n, n \geq 2$, et si $\sigma \in S_n$, alors $\sigma\delta\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_k))$

b) Soient δ_1 et δ_2 deux cycles de $S_n, n \geq 2$. montrer que δ_1 et δ_2 sont conjugués dans $S_n \Leftrightarrow \delta_1$ et δ_2 ont la même longueur.

c) Soit $\delta = (i_1, \cdots, i_k)$ et $p \in \mathbb{N}^*$. δ^p est-il un cycle ?

Exercice 10 :

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ avec $2 \leq k \leq n$ et soit $\delta = (1, \cdots, k) \in S_n$.

a) Montrer que si δ_1 est un k-cycle de S_n il existe $\sigma \in S_n$ telle que $\delta_1 = \sigma\delta\sigma^{-1}$

b) Soit $\sigma \in S_n$, montrer qu'il y a équivalence entre :

i) $\sigma\delta = \delta\sigma$

ii) $\exists\, r \in \{1, \cdots, k\}$ et $\exists\, \psi \in S_n$ avec $Supp(\psi) \subseteq \{k+1, \cdots, n\}$ tel que $\sigma = \delta^r.\psi$

c) Détérminer le nombre des permutations de S_n qui commuttent avec δ.

d) (Facultatif) Montrer que le nombre des k-cycles de S_n est $\dfrac{n!}{k(n-k)!}$

Exercice 11 :

e) Soit $\sigma = (1, ..., n) \in S_n$, $k \in$, déterminer $\sigma^k(1, 2)\sigma^{-k}$.

f) Déterminer $(\sigma^{-1})^{2009}$, où $\sigma = (5, 6, 3)(1, 3) \in S_6$.

Exercice 12 :

a) Soit $\sigma = (a_1, \cdots, a_k)$ un k-cycle de S_n.

i) Vérifier que $\sigma = (a_1, a_2)(a_2, a_3)\cdots(a_{k-1}, a_k)$.

ii) En déduire que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$

b) Soit $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 & 7 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer σ_1^{50} et σ_2^{100}.

c) Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & n \\ n & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$

Décomposer σ en cycles disjoints et déterminer sa signature et son ordre.

Exercice 13 :

a) Si $\delta = (i_1, \cdots, i_k) \in S_n, n \geq 2$, et si $\sigma \in S_n$, alors $\sigma\delta\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_k))$

b) Soient δ_1 et δ_2 deux cycles de $S_n, n \geq 2$. montrer que δ_1 et δ_2 sont conjugués dans $S_n \Leftrightarrow \delta_1$ et δ_2 ont la mÃłme longueur.

c) Soit $\delta = (i_1, \cdots, i_k)$ et $p \in \mathbb{N}^*$. δ^p est-il un cycle ?

Exercice 14 :

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ avec $2 \leq k \leq n$ et soit $\delta = (1, \cdots, k) \in S_n$.

a) Montrer que si δ_1 est un k-cycle de S_n il existe $\sigma \in S_n$ telle que $\delta_1 = \sigma\delta\sigma^{-1}$

b) Soit $\sigma \in S_n$, montrer qu'il y a équivalence entre :

i) $\sigma\delta = \delta\sigma$

ii) $\exists\, r \in \{1, \cdots, k\}$ et $\exists\, \psi \in S_n$ avec $Supp(\psi) \subseteq \{k+1, \cdots, n\}$ tel que $\sigma = \delta^r.\psi$

c) Détérminer le nombre des permutations de S_n qui commuttent avec δ.

d) (Facultatif) Montrer que le nombre des k-cycles de S_n est $\dfrac{n!}{k(n-k)!}$

Exercice 15 :

a) Soit G un groupe abélien fini d'ordre n, alors il existe $x \in G$ tel que

$$o(x) = \underset{y \in G}{p.p.c.m}\,(o(y)).$$

b) Soit K un corps commutatif et G un sous groupe fini de K^*. Montrer que G est cyclique.

Exercice 16 :

1. **Montrer que** $Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \cup(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. **Déterminer** $Aut(\mathbb{Z})$

2. **Soient** G_1, G_2 **deux groupes isomorphes. Montrer que** $Aut(G_1) \simeq Aut(G_2)$.

3. **Si** $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ **où les** p_i **premiers distincts et les** $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$. **Montrer que**

$$\cup(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \prod_{i=1}^{r} (\cup(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}))$$

4. **Si** p **est un nombre premier, montrer que** $\cup(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

5. **Si** p **est un nombre premier** ≥ 3 **et** α **un entier** ≥ 2

   i) **Montrer que si** $k \in \mathbb{N}^*$, **alors** $(1+p)^{p^k} = 1 + \lambda p^{k+1}$ **avec** $\lambda \in \mathbb{N}^*$, **premier à** p.

   ii) **Montrer que** $\cup(\mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$

6. **Montrer que** $\cup(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{\overline{1}\}$, $\cup(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \{\overline{1}, \overline{-1}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ **et pour** $\alpha \geq 3$ **on a** $\cup(\mathbb{Z}/2^{\alpha}\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{\alpha-2}\mathbb{Z}$.
   (Pour la dérnière question, commencer par prouver que $(5)^{2^k} = 1 + \lambda 2^{k+2}$, **où** $k \in \mathbb{N}^*$, **avec** λ **impair).**

Exercice 17 :

1. **Soit** G **un groupe tel que tout élément différent de l'élément neutre est d'ordre** 2. **Montrer que** G **est abélien.**

2. **Montrer que tout groupe d'ordre** 4 **est isomorphe à** $\left(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +\right)$ **ou à** $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +\right)$.

3. **Montrer que tout groupe d'ordre 8 qui possède la propriété 1) est isomorphe à** $(\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}, +)$

Exercice 18 :

Soit p **un nombre premier ; on considére le groupe** $G = \mathbb{Z}/_{p^2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$. **Déterminer les éléments de** G **d'ordre** p **(resp .** p^2**) ainsi que les sous- groupes de** G **d'ordre** p **(resp .** p^2**).**

Exercice 19 (Produit semi-direct) :

Soient H **et** K **deux groupes et** $\varphi : H \mapsto Aut(K)$ **un homomorphisme de groupes. On définit une loi de composition interne sur l'ensemble** $K \times H$ **par :** $\forall (k,h), (k^{'}, h^{'}) \in K \times H$, $(k,h).(k^{'}, h^{'}) = (k(\varphi(h)(k^{'})), hh^{'}))$.

a) **Montrer que** $(K \times H, .)$ **est un groupe, appelé le produit semi-direct de** K **et** H **relativement à** φ, **on le note** $KX_{\varphi}H$.

b) **Montrer que** $Ko = K \times \{e_H\}$ **est un sous groupe distingué de** $KX_{\varphi}H$, **isomorphe à** K.

c) **Montrer que** $Ho = \{e_K\} \times H$ **est un sous groupe de** $KX_{\varphi}H$, **isomorphe à** H.

d) **Montrer que** $\forall\, z \in KX_{\varphi}H$, $\exists!\,(ko, ho) \in K_o \times H_o$ **tel que** $z = k_o h_o$.

e) **Expliciter $KX_\varphi H$ lorsque φ est l'homomorphisme trival.**

f) **Montrer que $KX_\varphi H$ est abélien si et seulement si K et H sont abéliens et φ est trival.**

g) **Soient G un groupe, K_1 un sous-groupe distingué de G et H un sous-groupe de G. Montrer que si $K \cap H = \{e\}$ et $G = HK$, alors G est canoniquement isomorphe à $KX_\varphi H$, où $\varphi : H \mapsto Aut(k)$, $\varphi(h)(k) = hkh^{-1}$ pour tout $(h,k) \in H \times k$.**

h) **Si ψ est un autre homomorphisme de groupe $H \mapsto Aut(K)$.**

  i) **On suppose qu'il existe $\alpha \in Aut(H)$ tel que $\psi = \varphi o \alpha$. Montrer que $KX_\varphi H \simeq KX_\psi H$.**

  ii) **On suppose qu'il existe $u \in Aut(K)$ tel que $(\forall\ h \in h)(\varphi(h) = u\psi(h)u^{-}1)$. Montrer que $KX_\varphi H \simeq KX_\psi H$.**

i)**Soit G un groupe abélien,**

$$f: \begin{array}{ccc} g & \mapsto & g \\ x & \mapsto & -x \end{array}$$

et $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \mapsto & Ant(G) \\ \overline{o} & \mapsto & \varphi(\overline{o}) = id_G \\ \overline{1} & \mapsto & \varphi(\overline{1}) = f \end{array}$

En prenant $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \geq 2$. Un groupe est dit diédral de degré n, et noté Dn, s'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}X_\varphi\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

j) **Soit G un groupe tel que $\forall\,(a,b) \in G^2, (ab)^2 = a^2b^2$, montrer que G est abélien. Construire comme produit semi direct, un groupe d'ordre 27 où tout élément est d'ordre 3 mais qui n'est pas abélien, bien que pour tout couple (a,b), $a^3b^3 = (ab)^3$.**

<u>Exercice 20</u> :

Soit G un groupe fini d'ordre 6.

a) **Montrer que G admet un élément d'ordre 2.**

b) **On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre 1 ou 2. Soit a et b deux éléments distincts entre eux et distincts de l'élément neutre e de G. Montrer que $\{e, a, b, ab\}$ est un sous groupe d'ordre 4.**

c) **Montrer que si G est abélien, alors il est cyclique.**

d) **On suppose que G n'est pas abélien. Montre que G est isomorphe à D_3.**

e) **Les groupes S_3 et D_3 sont-ils isomorphes ?**

f) **Un groupe non abélien fini d'ordre 6 est-il diédral ?**

<u>Exercice 21</u> :

Soit G un groupe fini et H un sous groupe distingué de G .

1. **Montrer que les p-sous groupes de Sylow de H sont les intersections des les p-sous groupes de Sylow de G avec H.**

2. **Montrer que les p-sous groupes de Sylow de $\frac{G}{H}$ sont de la forme $\frac{KH}{H}$, où K est un p-sous groupes de Sylow de G.**

Exercice 22 :

Soient p et q sont deux entiers premiers distincts :

a) **Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre pq.**

b) **Prouver q'un groupe d'ordre p^2q n'est pas simple.**

c) **Un groupe d'ordre 45 est-il abélien ?**

d) **Un groupe d'ordre 225 est-il abélien ?**

Exercice 23 :

Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre ≤ 15.

Exercice 24 :

Soit G un groupe simple d'ordre 60.

1. **Montrer que G a six 5-Sylow.**
2. **Soit S un 5-Sylow de G. Quel est l'indice de $N_G(S)$ dans G ?**
3. **Montrer que $(g, xN_G(S)) \mapsto gxN_G(S)$, définit une action(à gauche) de G sur $(\frac{G}{N_G(S)})_g$ qui est transitive et fidèle. En déduire que G se plonge dans S_6, on notera J l'image de G par ce plongement.**
4. **Montrer que $J \subseteq S_6$.**
5. **Considérons l'action (à gauche), transitive et fidèle de A_6 sur $\frac{A_6}{J}$ définie par :**

$$(g, xJ) \mapsto gxJ.$$

On regarde A_6 comme le groupe des permutations paires sur l'ensemble

$$\frac{A_6}{J} = \{J = J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\}.$$

Montrer que $J \subseteq A_5$.

6. **Conclure que G est isomorphe à A_5.**