Université My Ismail
Facultée des Sciences
Département de Mathématiques
et Informatique

Année universitaire 19-20
Filière : Math. Fondamentales
Algèbre 7 (S_6)

Série 2.

Exercice 1:

a) **Le produit de deux anneaux principaux est-il principal ?**

b) **Quels sont les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$?**

c) **Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que le produit de deux éléments d'un anneau soit irréductible.**

d) **Un anneau qui admet une suite strictement croissante d'idéaux est-il principal ?**

Exercice 2:

a) **Soient n et m deux entiers naturels non nuls. On suppose que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$, est ce que forcément n et m sont premiers entre eux?**

b) **Soit A un anneau commutatif. On suppose que l'anneau $A[X]$ est principal. Montrer que A est un corps.**

Exercice 3 (facultatif): (Théorème des restes Chinois)

I- Soit A un anneau commutatif et soient $a_1, \ldots, a_n$ des idéaux de A tels que $a_i + a_j = A$ pour tous $i, j = 1, \cdots, n$; $i \neq j$.

1. **Montrer que $\forall x_1, \cdots, x_n \in A, \exists x \in A$ tel que $x \equiv x_i (\mod a_i)$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$.**
2. **Soit**

$$f : A \to \prod_{i=1}^{n} A/a_i$$

l'application canonique. Montrer que $\ker f = \bigcap_{i=1}^{n} a_i$ et que f est surjective. En déduire que

$$A/\bigcap_{i=1}^{n} a_i \cong \prod_{i=1}^{n} A/a_i.$$

II- Soit n un entier > 1 et soit

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i}$$

sa décomposition en facteurs premiers.

1. **Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{Z}/p^{r_i}\mathbb{Z}$. En déduire que**

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \simeq \prod_{i=1}^{m} (\mathbb{Z}/p^{r_i}\mathbb{Z})^*$$

2. **Soit φ la fonction d'Euler : $\varphi(n) = \mid (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \mid$.**

   a) **Montrer que $\varphi_(n) = \prod_{i=1}^{m} \varphi(p_i^{r_i})$.**

   b) **Montrer que si p est un nombre premier alors $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$, pour tout entier $\alpha \geq 1$.**

   c) **En déduire que $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_m})$**

Exercice 4 :

Soient A et B deux anneaux commutatifs.

a) **Donner une condition nécéssaire et suffisante sur A et B pour que l'anneau produit $A \times B$ soit factoriel.**

b) **Caractériser les idéaux premiers de $A \times B$.**

c) **Caractériser les idéaux maximaux de $A \times B$.**

Exercice 5 (facultatif):

1. **Montrer que l'anneau $A = \mathbb{Z}[i]$ est principal donc factoriel. Déterminer $U(A)$.**

2. **Faites de meme pour l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.**

Exercice 6 (facultatif):

a) **Soit A un anneau commutatif. Montrer $A[X]$ est principal si et seulement si, A est un corps .**

b) **Une réunion filtrante d'anneaux principaux, est elle principal ?**

c) **Soit A un anneau intègre. Montrer que A est principal si et seulement si, chaque idéal premier est principal .**

d) **Soit $\alpha = \dfrac{1 + i\sqrt{19}}{2}$, l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha] = \{z \in \mathbb{C}/\exists(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $z = a + b\alpha\}$ est principal mais non euclidien, de meme pour l'anneau $\dfrac{\mathbb{R}[X,Y]}{(X^2 + Y^2 + 1)}$**

Exercice 7:

Soit A un anneau intgre. On dira que A est un anneau de Gauss (on dit aussi GCD domain) si deux éléments quelconques ont un p.g.c.d.

1. **Montrer que si deux éléments quelconques ont un p.p.c.m. alors A est de Gauss.**

2. **On suppose que A est de Gauss. Montrer que :**

   a) $p.g.c.d.(ac, bc) = c(p.g.c.d.(a,b))$.

   b)$p.g.c.d.(a,b) = p.g.c.d.(a,c) = 1 \Rightarrow p.g.c.d.(a,bc) = 1$.

3. **Caractériser en termes d'idéaux le fait que $d = p.g.c.d.(a,b)$.**

4. **On suppose que A est de Gauss. Montrer que:**

    a)(Lemme de Gauss) Si a divise bc et $p.g.c.d.(a,b)=1$ alors a divise c.

    b)Soit x non nul et non inversible:
    x est irréductible $\Leftrightarrow$ x est premier.

    c)Si a et b sont deux éléments non nuls tels que

    $$\forall x \in A : \, a \, divise \, bx \; \Rightarrow \; a \, divise \, x,$$

    alors $p.g.c.d.(a,b)=1$.

    d)En déduire que deux élément quelconques ont un $p.p.c.m.$

<u>Exercice 8:</u> **Soit A un anneau intg̀re.**

1. **Montrer que si toute suite croissante d'idéaux principaux est stationnaire , alors tout élément non nul et non inversible admet un diviseur irréductible.**

2. **Montrer que :**

    a) Si x est irréductible et $u \in U(A)$, alors ux est irréductible.

    b) si toute suite croissante d'idéaux principaux est stationnaire , alors tout élément non nul et non inversible est produit d'éléments irréductibles.

    c) Si A est factoriel, tout élément non nul est contenu dans un nombre fini d'idéaux principaux.

3. **Montrer qu'il y a équivalence entre:**

    a)A est factoriel.

    b)A est de Gauss et tout élément non nul et non inversible est produit d'éléments irréductibles.

    c)A est de Gauss et toute suite croissante d'idéaux principaux est stationnaire.

<u>Exercice 9:</u>

a) Un sous-anneau d'un anneau factoriel est il factoriel?

b) Soit A un anneau (commutatif unitaire). Montrer :
Tout idéal engendré par une partie finie est principal si, et seulemen si, A est de Gauss et le $p.g.c.d.$ de deux éléments quelconques est dans l'idéal qu'ils engendrent.

c) Montrer que tout idéal premier non nul contient un élément premier dans un un anneau factoriel.

<u>Exercice 10:</u> **Soit A un anneau intg̀re.**

1. **On suppose que $A[X]$ est factoriel.**

    a)Montrer que le lemme de Gauss est vérifié dans A.

    b)En déduire que A est factoriel.

2. **Montrer qu'il y a équivalence entre:**

a) A est principal.

b) A est factoriel et le *p.g.c.d.* de deux éléments quelconques est dans l'idéal qu'ils engendrent.

Exercice 11 (facultatif): Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + ib/a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un anneau intègre.
2. Soit $N : A \mapsto \mathbb{N}$, $a + ib \mapsto N(a + ib) = a^2 + b^2$.

   a) Montrer que $N(xy) = N(x)N(y)$, pour tous x et y dans A.

   b) Détérminer $U(A)$.

   c) Montrer que 2, $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$ sont irréductibles.
3. A est-il factoriel? de Gauss?

Exercice 12 : Pour tout entier naturel non nul n, on pose $A_n = A[X_1, ..., X_n]$ et B la réunion des A_n, où A est factoriel.

a) Montrer que B est un anneau intègre et dététerminer $U(B)$.

b) Montrer que B est factoriel.