Corrigés des Exercices du Chapitre III. (1)

Exercice 3. • On rappelle que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$, alors sa partie réelle $P(x,y)$ et sa partie imaginaire $Q(x,y)$ sont différentiables sur $\tilde{\Omega}$ et vérifient les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} = - \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

• On rappelle aussi que toute fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est indéfiniment $\mathbb{C}$-différentiable, et donc ses parties réelles et imaginaires sont de classe C^∞.

1) f est holomorphe sur $U \Rightarrow P := Re(f)$ et $Q := Im(f)$ vérifient les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} = - \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \; ; \; \dfrac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} \; ; \; \dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = - \dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases}$$

Donc, P et Q sont harmoniques.

2) D'après 1), pour que $P_1(x,y) = x(x^2+y^2)$ soit la partie

réelle d'une certaine fonction holomorphe, il faut d'abord qu'elle soit harmonique.

Or le Laplacien de P_1 est :

$$\Delta(P_1) = \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = 8x \neq 0$$

Donc : Il n'existe aucune fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ dont la partie réelle (ou imaginaire) soit égale à $P_1(x,y) = x(x^2+y^2)$.

3) Notons d'abord que $Q_2(x,y) = e^{-y}\sin x$ est harmonique.

Donc, pour qu'elle soit la partie imaginaire d'une fonction holomorphe $h = P_2 + Q_2 i$, les fonctions P_2 et Q_2 doivent être solutions des équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_2}{\partial x} = \dfrac{\partial Q_2}{\partial y} = -e^{-y}\sin x & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial P_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q_2}{\partial x} = -e^{-y}\cos x & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow P_2(x,y) = e^{-y}\cos x + h(y)$

où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

$(2) \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}\cos x + h(y)\right) = -e^{-y}\cos x$

$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h$ est constante.

Donc : $P_2(x,y) = e^{-y}\cos x + C_1$ (C_1 : constante)

Si on prend $q=0$, $P_2(x,y) = e^{-y}\cos x$.

Et alors, $h(x+yi) = P_2(x,y) + Q_2(x,y)i$

$$= e^{-y}\cos x + e^{-y}\sin x\, i$$

$$= e^{-y}e^{ix} = e^{i(x+yi)}$$

Donc : $h(z) = e^{iz}\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4.

Rappels :

1) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction, on pose : $\tilde{U} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x+yi \in U\}$

$\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{C}$, $(x,y) \longmapsto \tilde{f}(x,y) := f(x+yi)$

Alors on peut identifier :

* U à $\tilde{U}$ par l'application $x+yi \longmapsto (x,y)$.
* f à $\tilde{f}$: $f(x+yi) = \tilde{f}(x,y)$.

2) L'application $g : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est dite différentiable en $(x_0,y_0) \in V$ s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que :

$$g(x_0+h, y_0+k) = g(x_0,y_0) + ah + bk + \|(h,k)\|\,\varepsilon(h,k)$$

avec $\lim_{\|(h,k)\|\to 0} \varepsilon(h,k) = 0$ $\left(\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}\right)$

Dans ce cas, l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(h,k) \longmapsto ah+bk$

est une application linéaire appelée la différentielle de g en (x_0,y_0), on la note $dg(x_0,y_0)$. Et on a :

$$a = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad b = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)$$

c.à.d : $dg(x_0,y_0)(h,k) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k$.

3) $g : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 sur V si, et seulement si, g est différentiable en tout point de V et l'application $(x,y) \longmapsto df(x,y)$ est continue sur V.

4) Les applications $(x,y) \longmapsto x$, $(x,y) \longmapsto y$ et $(x,y) \longmapsto x+yi$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$.
On note dx, dy et dz leurs différentielles.
Et alors on a : $\quad dz = dx + dy\, i$.

5) Dire que $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in U$ signifie qu'il existe un nombre complexe qu'on note $f'(z_0)$ et une fonction ξ définie au voisinage de 0 tels que :

$$f(z_0+z) = f(z_0) + f'(z_0)\cdot z + z\,\xi(z) \qquad (1)$$

avec $\lim\limits_{z \to 0} \xi(z) = 0$.

6) Dire que $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-différentiable

en (x_0,y_0) signifie qu'il existe deux nombres complexes a et b qu'on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ respectivement tels que :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).k + \|(h,k)\| \varepsilon_2(h,k) \qquad (2)$$

avec $\lim\limits_{\|(h,k)\|\to 0} \varepsilon_2(h,k) = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). En prenant $z = h+ki$ dans (1), il est clair que l'on obtient (2), avec $a = f'(z_0)$ et $b = -f'(z_0)i$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$df(x_0,y_0)(h,k) = ah + bk = a(h+ki) .$$

Donc : $df(x_0,y_0) = a.dz$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $df(x_0,y_0) = a.dz$. Alors on a :
Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, soit $z = h+ki$.

$$f(z_0+z) = f(z_0) + az + \|(h,k)\| \varepsilon(h,k)\| , \text{ avec } \lim_{\|(h,k)\|\to 0} \varepsilon(h,k) = 0$$

On en déduit immédiatement que f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 et que $f'(z_0) = a$.

Exercice 5. Les fonctions $(x,y) \longmapsto z = x + yi$ et $(x,y) \longmapsto \bar{z} = x - yi$ sont différentiables et admettent comme différentielles :

$$\begin{cases} dz = dx + dy\, i \\ d\bar{z} = dx - dy\, i \end{cases}$$

Et alors on a :
$$\begin{cases} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = -\frac{1}{2}(dz - d\bar{z})i \end{cases}$$

1) Comme f est $\mathbb{C}$-différentiable sur U, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} i\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} i\right) \end{cases}$$

Et alors on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial z} i - \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} i \end{cases}$$

or $df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy$

$$\Rightarrow df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(dz + d\bar{z}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}i - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}i\right)(dz - d\bar{z})i$$

$$\Rightarrow \quad df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} .$$

2) Soient $P := Re(f)$ et $Q := Im(f)$.
Comme f est holomorphe sur U, f vérifie les équations de Cauchy-Riemann sur U :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Et d'après l'exercice 4, on a :

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} i = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} i$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} i = \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} i .$$

<u>Exercice 6</u>: Soient $P := Re(f)$ et $Q := Im(f)$.
Alors on a : $P(x,y) := x^2$ et $Q(x,y) := xy^3$.
S'il existe un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ sur lequel f est holomorphe, alors f doit vérifier les équations de Cauchy-Riemann sur U.
Et alors on doit avoir pour tout $z = x + yi \in U$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x = 3xy^2 \\ 0 = -y^3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow z = 0$$

Donc, les équations de Cauchy-Riemann pour f ne sont satisfaits qu'en $z = 0$.

Et alors, il n'existe aucun ouvert non vide de $\mathbb{C}$ sur lequel f est holomorphe.

Exercice 7. Pour tout $z = x + yi \in U$, on a :

$f(z) = \tilde{f}(x,y) = \mathrm{Log}|z| + \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)i = \mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)i$.

Posons : $P(x,y) := \mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2}$ et $Q(x,y) := \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Alors on a : $f(z) = \tilde{f}(x,y) = P(x,y) + Q(x,y)i$.

Comme P et Q sont différentiables sur $\tilde{U}$, alors f est $\mathbb{R}$-différentiable. Et alors, pour montrer que f est holomorphe sur U, il suffit de montrer qu'elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann sur U :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \tilde{U}.$$

Soit $(x,y) \in \tilde{U}$, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Alors, $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.

Donc, f vérifie les équations de Cauchy-Riemann sur U, et alors f est holomorphe sur U.

<u>Exercice 8.</u> 1) $f(x+yi) = (x+ay) + (bx+cy)i$

Il est évident que $P(x,y) := (x+ay)$ et $Q(x,y) := (bx+cy)$ sont différentiables. Et alors, pour que f soit entière il suffit qu'elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann en tout point de $\mathbb{C}$.

Soit $x+yi \in \mathbb{C}$. f vérifie les équations de Cauchy-Riemann en $z = x+yi$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \iff 1 = c \text{ et } a = -b$$

Donc : pour que f soit une fonction entière, il suffit de prendre $a = -b$ et $c = 1$.

Dans ce cas, on a : $f(z) = f(x+yi) = (x+ay) + (y-ax)i$

$$\Rightarrow f(z) = (x+yi) - a(x+yi)i \Rightarrow f(z) = (1-ai)z.$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2) $f(x+yi) = \cos x(2\operatorname{ch} y + a\operatorname{sh} y) + \sin x(2\operatorname{ch} y + b\operatorname{sh} y)\, i$.

Posons : $\begin{cases} P(x,y) := \cos x\,(2\operatorname{ch} y + a\operatorname{sh} y) \\ Q(x,y) := \sin x\,(2\operatorname{ch} y + b\operatorname{sh} y) \end{cases}$

Il est évident que P et Q sont différentiables.
Et alors, pour que f soit holomorphe il faut et il suffit qu'elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \iff \begin{cases} -\sin x(2\operatorname{ch} y + a\operatorname{sh} y) = \sin x(2\operatorname{sh} y + b\operatorname{ch} y) \\ \cos x(2\operatorname{sh} y + a\operatorname{ch} y) = -\cos x(2\operatorname{ch} y + b\operatorname{sh} y) \end{cases}$$

$$\iff a = b = -2$$

Donc, pour que f soit entière il faut que $a = b = -2$.
Et dans ce cas, pour tout $z = x+yi \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos x(2\operatorname{ch} y - 2\operatorname{sh} y) + \sin x(2\operatorname{ch} y - 2\operatorname{sh} y)\, i \\ &= 2(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)(\cos x + i\sin x) \\ &= 2e^{-y} e^{ix} \\ &= 2e^{i(x+yi)} \end{aligned}$$

Donc : $f(z) = 2e^{iz} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Exercice 9. $f(z) = \bar{z}\, e^{-|z|^2} = (x-yi)\, e^{-(x^2+y^2)} \quad \forall z = x+yi \in \mathbb{C}.$

Soient $P := \mathrm{Re}(f)$ et $Q := \mathrm{Im}(f)$. Alors on a :

$$P(x,y) := x\, e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{et} \quad Q(x,y) := -y\, e^{-(x^2+y^2)}.$$

P et Q sont différentiables. Donc, pour que f soit $\mathbb{C}$-différentiable en $z = x+yi$, il suffit qu'elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann en z :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \iff \begin{cases} e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2 e^{-(x^2+y^2)} = -e^{-(x^2+y^2)} + 2y^2 e^{-(x^2+y^2)} & (1) \\[2mm] -2xy\, e^{-(x^2+y^2)} = -2xy\, e^{-(x^2+y^2)} & (2) \end{cases}$$

(2) est toujours satisfaite.

$$(1) \iff 2e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2 e^{-(x^2+y^2)} - 2y^2 e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

$$\iff 1 - x^2 - y^2 = 0 \iff x^2+y^2 = 1$$

$$\iff |z| = 1.$$

Donc $f'(z)$ existe <u>ssi</u> $z \in S^1$.

Et dans ce cas, on a :

$$f'(z) = f'(x+yi) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\, i$$

$$= e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2 e^{-(x^2+y^2)} + 2xy\, e^{-(x^2+y^2)}\, i$$

Donc : $f'(z) = e^{-1}(1 - 2x^2 + 2xy)i \quad \forall z = x+yi \in S^1.$

Exercice 10. 1) $\Delta(P) = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 8 \neq 0$.

Donc, P est non harmonique, et alors il n'existe aucune fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est

$P(x,y) = 3x^2 + xy + y^2$.

2) $\Delta(P) = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$

$\Rightarrow$ P est harmonique.

Alors, il s'agit de trouver $Q(x,y) = \mathrm{Im}(f)$ qui satisfait les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 & (1) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6xy - 7 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow Q(x,y) = 3x^2y - y^3 + \varphi(x)$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

$(2) \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y - y^3 + \varphi(x)\right) = 6xy - 7$

$\Rightarrow \varphi'(x) = -7 \Rightarrow \varphi(x) = -7x + C$

où C est une constante.

Donc : $Q(x,y) = 3x^2y - y^3 - 7x + C$.

Et alors on a :

$f(z) = x^3 - 3xy^2 + 7y + (3x^2y - y^3 - 7x + c)\,i$.

Exercice 11. 1) Soient $P := \mathrm{Re}(f)$ et $Q := \mathrm{Im}(f)$.

Alors on a : $P(x,y) := x$ et $Q(x,y) := y^2$.

P et Q sont de classe C^∞, et alors f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$.

2) S'il existe U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que f est holomorphe sur U, alors f doit vérifier les équations de Cauchy-Riemann sur U :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc $U \subset A := \{x + yi \,/\, 2y = 1\}$

Et comme $\mathring{A} = \emptyset$, il n'existe aucun ouvert non vide U sur lequel f est holomorphe.

Exercice 12. 1) Soit $z_0 \in U$ tel que U soit étoilé par rapport à z_0.

Alors pour tout $z \in U$, $[z_0, z] \subset U$. Posons alors :

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\xi)\, d\xi \quad \forall z \in U.$$

- F est bien définie.
- F est holomorphe sur U et $F' = f$:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z_0, z+h]} f(\xi)\, d\xi - \int_{[z_0, z]} f(\xi)\, d\xi = \int_{[z, z+h]} f(\xi)\, d\xi$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z,z+h]} [f(y)-f(z)]\, dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} |h| \max_{y \in [z,z+h]} |f(y)-f(z)| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

puisque f est continue en z.

Donc, F est $\mathbb{C}$-différentiable en z et $F'(z) = f(z)$.

Et alors, F est une primitive de f sur U.

2) Il suffit d'appliquer 1) sur une boule centrée en chaque point de V, et qui est bien sûr étoilée.

<u>Exercice 13.</u> **1)** Soient $\alpha, \beta \in U$. Comme U est connexe, il est connexe par arcs (d'après le cours), et alors il existe un chemin γ paramétré par $\varphi : [a,b] \longrightarrow U$ tel que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$. $\gamma = \varphi([a,b])$

Alors on a : $f(\beta) - f(\alpha) = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$

$$= \int_\gamma f' = \int_\gamma 0 = 0$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = f(\beta).$$

Donc, f est constante sur U.

2) Soient $z, w \in \mathbb{C}$, et fixons $\alpha \in \mathbb{C}$.

Posons : $f(z) := e^{z} e^{\alpha - z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f'(z) = e^{z}e^{\alpha-z} - e^{z}e^{\alpha-z} = 0$

Et alors, d'après 1), f est constante sur $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow f(w) = f(0) \Rightarrow e^{w}e^{\alpha-w} = e^{0}e^{\alpha-0}$

Et pour $\alpha = w+z$, on a :

$$e^{w}e^{(w+z)-w} = e^{0}e^{(w+z)-0} = e^{w+z}$$

$$\Rightarrow e^{w+z} = e^{w}\cdot e^{z}.$$

Exercice **14**. Il est clair que : (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii), (iv) et (v).

Et puisque f est holomorphe, elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann : $\left(\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ (*)

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). découle des équations de Cauchy-Riemann, et du fait que $f' = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} i$ (Voir Exercice 5).

(ii) $\Rightarrow$ (i). découle de $f' = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} i$ (Voir Exercice 5)

(iv) $\Rightarrow$ (ii). On a $2P = f + \bar{f}$. Donc P est holomorphe sur U. Comme $\operatorname{Im}(P) = 0$, alors d'après (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), on a (ii).

(v) $\Rightarrow$ (ii). Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$|f(z)|^{2} = P^{2}(x,y) + Q^{2}(x,y) = a$$

Et soit $z = x+yi \in U$.

Si $a=0$, alors $f=0$. Supposons alors que $a \neq 0$.
Pour tout $z = x+yi \in U$, on a :

$$P(x,y)\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = P(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0$$

Compte-tenu des équations de Cauchy-Riemann, on a :

$$(1)\begin{cases} P(x,y)\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) - Q(x,y)\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0 \\ Q(x,y)\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) + P(x,y)\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Le système (1) aux inconnues $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ est homogène et a pour déterminant :

$$P^2(x,y) + Q^2(x,y) = a \neq 0.$$

Et alors, $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$.

Et comme U est convexe, P est constante sur U.

Exercice 15. Soient $P := Re(f)$ et $Q := Im(f)$.
Pour tout $z = x+yi \in U$, on a :

$$P(x,y) = Re\left(f(x+yi)\right) = F\left(Q(x,y)\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = F'\left(Q(x,y)\right)\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = F'\left(Q(x,y)\right)\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \end{cases} \quad (1)$$

Et d'après les équations de Cauchy-Riemann, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = -F'\big(Q(x,y)\big)\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = F'\big(Q(x,y)\big)\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left(1+\left[F'\big(Q(x,y)\big)\right]^2\right)\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Et d'après (1), on a aussi $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$.

Et comme U est connexe, P est constante.

Et alors, d'après l'exercice 14, f est constante.

<u>Exercice 16.</u> Posons :

$$\begin{cases} P := \mathrm{Re}(f) \\ Q := \mathrm{Im}(f) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} R := \mathrm{Re}(g) \\ S := \mathrm{Im}(g) \end{cases}.$$

Alors on a : $f = P + Qi$ et $g = R + Si$.

Pour tout $z = x + yi$, on a :

$$g(z) = g(x+yi) = \overline{f[\theta(x+yi)]} = \overline{f(y+xi)}$$

$$= \overline{P(y,x) + Q(y,x)i} = P(y,x) - Q(y,x)\,i$$

Alors on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(y,x) \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(y,x) \\ \dfrac{\partial S}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial y}(y,x) \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial S}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(y,x) \end{cases}$$

Et comme f vérifie les équations de Cauchy-Riemann, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(y,x) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(y,x) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(y,x) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(y,x) \end{cases}$$

Donc :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(y,x) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(y,x) = \dfrac{\partial S}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(y,x) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(y,x) = -\dfrac{\partial S}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

D'où, g vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

D'autre part, $R = P \circ \tilde{\theta}$ et $S = Q \circ \tilde{\theta}$. Et comme P et Q sont de classe C^1, R et S sont de classe C^1 aussi. Et alors g est holomorphe sur U.

Excercice 17. Supposons qu'il existe une telle fonction.

Soit $Q := \mathrm{Im}(f)$. Alors $f = P + Qi$.

Comme f est holomorphe sur U, elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1+\cos x + \operatorname{ch} y}{(\cos x + \operatorname{ch} y)^2} & (1) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\sin x \operatorname{sh} y}{(\cos x + \operatorname{ch} y)^2} & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow Q(x,y) = \dfrac{\operatorname{sh} y}{\cos x + \operatorname{ch} y} + \varphi(y)$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

$(1) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi$ est constante.

Et comme $Q(0,0) = 0$, cette constante est nulle.

Donc, $f(x+yi) = \dfrac{\sin x}{\cos x + \operatorname{ch} y} + \dfrac{\operatorname{sh} y}{\cos x + \operatorname{ch} y}\, i$

$$= \frac{\sin x + \operatorname{sh} y\, i}{\cos x + \operatorname{ch} y} = \operatorname{tg}\left(\frac{x+yi}{2}\right)$$

Donc : $\quad f(z) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{z}{2}\right) \quad \forall z \in U$

Et alors $f(z) = \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right)$ est l'unique fonction holomorphe sur U vérifiant $\operatorname{Re}(f) = \dfrac{\sin x}{\cos x + \operatorname{ch} y}$ et $f(0) = 0$.

Exercice 18. 1) Soit f une fonction entière telle que $\operatorname{Re}(f) = P$.

Posons $Q := \operatorname{Im}(f)$. Alors f vérifie les équations de

Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2ax + 2by \quad (1) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2bx - 2cy \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = 2a \qquad (2) \Rightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = -2c.$$

Comme on doit avoir $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}$, alors on a $a = -c$.

Donc, une condition nécessaire est $a = -c$.

Inversement, si $a = -c$, on voit que f vérifie les équations de Cauchy-Riemann, et P et Q sont de classe C^1. Et alors f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $Re(f) = P$.

D'où : $a = -c$ est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $Re(f) = P$.

2) Maintenant, on suppose que $a = -c$.

Donc : $P(x,y) = ax^2 + 2bxy - ay^2$. Et on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2ax + 2by \quad (1) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2ay - 2bx \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow Q(x,y) = 2axy + by^2 + \varphi(x)$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

$$(2) \Rightarrow \varphi'(x) = -2bx \Rightarrow \varphi(x) = -bx^2 + C$$

Et alors on trouve : $f(x+yi) = (ax^2 + 2bxy - ay^2) + (2axy + by^2 - bx^2 + C)i$.

où C est une constante.