Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
SMA Semestre VI
Distributions

# Théorie des Distributions

Ce document est constitué d'extraits de cours (publiques) disponibles sur la toile.

# Table des matières

# Première partie

# Notions de bases

# Chapitre 1

# Rappels de théorie de l'intégration

## 1.1 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Quelles sont les propriétés fondamentales que partagent la longueur d'une partie de $\mathbb{R}$, l'aire d'une partie de $\mathbb{R}^2$, le volume d'une partie de $\mathbb{R}^3$ et plus généralement le volume d'une partie de $\mathbb{R}^d$ ? Peut-on donner un sens au volume de toute partie de $\mathbb{R}^d$ ? On attend d'une notion de longueur, d'aire et de volume d'avoir en commun la positivité et la propriété d'additivité qui est que, si deux parties $A$ et $B$ de $\mathbb{R}^d$ sont disjointes, le volume de leur réunion est égal à la somme de leurs volumes : $\mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B)$ lorsque $A \cap B = \emptyset$. Une autre propriété attendue du volume est l'invariance par translation. Si $x \in \mathbb{R}^d$ et $A$ est une partie de $\mathbb{R}^d$, $\mathrm{vol}(x + A) = \mathrm{vol}(A)$. Au début du XX$^e$ siècle, Émile Borel introduit une idée clé, celle qu'une notion de volume doit vérifier une propriété plus forte, l'additivité dénombrable, pour pouvoir s'intégrer utilement dans les théories modernes d'analyse. Une « bonne » notion de volume devra donc vérifier que, pour toute famille dénombrable $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}^d$ deux à deux disjointes,

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p\right) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(A_p).$$

Mais, une telle notion de volume qui associerait à *toute* partie de $\mathbb{R}^d$ un réel positif vérifiant l'additivité dénombrable et l'invariance par translation n'existe pas. C'est Henri Lebesgue qui en 1902 sera le premier à construire un exemple de *mesure* sur $\mathbb{R}$ qui soit dénombrablement additive et invariante par translation. Cette mesure correspond à la notion de volume recherchée. Pour cela, Lebesgue introduit la notion de mesure extérieure qui approche « par au-dessus » la mesure de toute partie de $\mathbb{R}$. Puis il définit les parties de $\mathbb{R}$ qui seront suffisament peu irrégulières pour que l'on puisse leur associer une mesure. Ce sont les parties Lebesgue-mesurables de $\mathbb{R}$.

### 1.1.1 Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue

Nous commencons par définir les pavés de $\mathbb{R}^d$ et leur volume. Un pavé $P$ dans $\mathbb{R}^d$ est un produit cartésien de $d$ intervalles de $\mathbb{R}$ bornés (ouverts, fermés, semi-ouverts ou semi-fermés)

$$P = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d),$$

où $a_j \leq b_j$ sont des nombres réels, $j = 1, \ldots, d$. Pour un tel sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, la notion naturelle de volume associée est le produit des longueurs des côtés. On appelle *volume* d'un pavé $P$ le réel positif noté $|P|$ défini par

$$|P| = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Une union de pavés est dite *quasi disjointe* si les intérieurs des pavés de l'union sont disjoints. Enfin, un *cube* est un pavé pour lequel $b_1 - a_1 = \cdots = b_d - a_d$. L'intérêt de ces cubes et pavés provient du fait qu'ils approchent bien les ouverts de $\mathbb{R}^d$.

**Proposition 1.1.1.** *Tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ peut s'écrire comme union dénombrable de cubes quasi disjoints.*

Pour définir le volume d'une partie plus compliquée qu'un pavé, nous commençons par construire une fonction qui à toute partie de $\mathbb{R}^d$ associe un volume qui généralise le volume des pavés. L'idée est d'approcher « par au-dessus » tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ par des cubes. Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}^d$. On appelle mesure extérieure de $E$ le réel positif défini par

$$\lambda_d^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |C_j| \;\middle|\; \forall j \geq 1,\ C_j \text{ est un cube fermé et } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\}.$$

Pour les parties simples comme l'ensemble vide, un point ou un cube, la mesure extérieure correspond bien à notre idée intuitive de volume. La mesure extérieure de $\mathbb{R}^d$ est infinie.
Toutefois, la mesure extérieure ne vérifie pas l'additivité dénombrable voulue pour définir une bonne notion de volume. Nous avons seulement l'inégalité suivante : si $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, alors

$$\lambda_d^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d^*(E_j).$$

On a tout de même que si $E = E_1 \cup E_2$ avec $d(E_1, E_2) > 0$, alors $\lambda_d^*(E) = \lambda_d^*(E_1) + \lambda_d^*(E_2)$.
Malgré ces deux propriétés, on ne peut pas conclure en général que, si $E_1 \cup E_2$ est une union disjointe de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, $\lambda_d^*(E_1 \cup E_2) = \lambda_d^*(E_1) + \lambda_d^*(E_2)$. Cette égalité n'aura lieu que pour des ensembles qui ne sont pas trop pathologiques, les ensembles mesurables.

**Définition 1.1.2.** *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit Lebesgue-mesurable, ou plus simplement mesurable, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant $E$ tel que*

$$\lambda_d^*(\mathcal{O} \setminus E) \leq \varepsilon.$$

On a alors que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est mesurable, qu'une union dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable et que le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable.

Nous pouvons maintenant définir la notion de mesure pour un ensemble mesurable. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, on définit sa mesure de Lebesgue par $\lambda_d(E) = \lambda_d^*(E)$. Alors, la mesure de Lebesgue vérifie bien la propriété d'additivité dénombrable.
Soit $(E_j)_{j\geq 1}$ une famille dénombrable d'ensembles mesurables et disjoints dans $\mathbb{R}^d$. Alors leur réunion $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ est mesurable et

$$\lambda_d(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(E_j).$$

On a aussi l'invariance par translation : si $E$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, le translaté $x + E = \{x + y \mid y \in E\}$ est mesurable et $\lambda_d(x + E) = \lambda_d(E)$.

On note souvent aussi la mesure de Lebesgue par le symbole $\mathrm{d}x$ au lieu de $\lambda_d$.

### 1.1.2 Espaces mesurés et applications mesurables

On généralise la notion de mesure à un ensemble quelconque en demandant à ce que les principales propriétés de stabilité des ensembles mesurables et de la mesure de Lebesgue soient conservées.

**Définition 1.1.3.** *Soit $X$ un ensemble. Une tribu sur $X$ est un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *$X \in \mathcal{M}$ ;*
2. *si $A \in \mathcal{M}$, son complémentaire $A^c$ est dans $\mathcal{M}$ ;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.*

*Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés ensembles mesurables. Un espace mesurable est un couple $(X, \mathcal{M})$ où $X$ est un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu sur $X$.*

**Exemple 1.1.4.** ***(Tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$).*** *L'ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$ Lebesgue-mesurables forme une tribu sur $\mathbb{R}^d$ que nous noterons $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$.*

**Exemple 1.1.5.** *On appelle tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire, la plus petite tribu de $\mathbb{R}^d$ contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ (pour la topologie usuelle).*

Une mesure est une fonction définie sur une tribu, à valeurs positives, vérifiant une condition d'additivité dénombrable. Nous axiomatisons donc la propriété de $\sigma$-additivité obtenue pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

**Définition 1.1.6.** *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ est une application de $\mathcal{M}$ dans $[0, +\infty]$, telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables deux à deux disjointes,*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), \ (\sigma-\text{additivité}).$$

*Si $\mu$ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$, le triplet $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est appelé un espace mesuré.*

**Exemple 1.1.7.** *La mesure de Lebesgue est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d))$.*

**Exemple 1.1.8.** *Les mesures à poids, de la forme $\mathrm{d}\mu(x) = h(x)\mathrm{d}x$ avec $h > 0$ et qui vérifient :*

$$\forall f \textit{ mesurable}, \ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

**Exemple 1.1.9.** *Les mesures discrètes notées $\mathrm{d}\mu = \sum \alpha_j \delta_{a_j}$ et qui vérifient :*

$$\forall f \textit{ mesurable}, \ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum \alpha_j f(a_i).$$

**Définition 1.1.10.** *On appelle mesure de Radon positive sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^d$ une mesure positive $\mu$ sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$ qui est finie sur les compacts :*

$$\forall K \subset \Omega \textit{ compact}, \ \mu(K) < +\infty.$$

*On appelle mesure de Radon tout combinaison linéaire $\mu_1 - \mu_2 + \mathrm{i}(\mu_3 - \mu_4)$ où les $\mu_j$ sont des mesures de Radon positives.*

Les trois exemples précédents sont des mesures de Radon positives.

Concluons par un point de terminologie.

**Définition 1.1.11.** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit $P$ une propriété définie sur $X$. On dit que $P$ est vraie $\mu$-presque partout si elle est vraie hors d'un ensemble mesurable de mesure nulle. On écrit aussi $P$ vraie $\mu$-pp. On dit encore que $P$ est vraie pour $\mu$-presque tout $x$ dans $X$.*

On termine par la notion de mesurabilité d'une application entre espaces mesurables qui est analogue à celle de la continuité d'une application entre espaces topologiques et utilise la notion d'image réciproque.

**Définition 1.1.12.** *Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables. Une application $f$ de $X$ dans $Y$ est dite mesurable lorsque, pour tout ensemble mesurable $N \in \mathcal{N}$, son image réciproque $f^{-1}(N)$ est mesurable, c'est-à-dire que $f^{-1}(N) \subset \mathcal{M}$.*

**Exemple 1.1.13.** ***(Fonctions caractéristiques).*** *On considère un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ et on munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Pour une partie $A$ de $X$,* la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A$ est mesurable.

## 1.2 Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

### 1.2.1 Construction de l'intégrale de Lebesgue

On commence par définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive. On appelle fonction étagée toute combinaison linéaire finie d'indicatrices d'ensembles mesurables :

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}, \ \alpha_j \in \mathbb{R}, \ A_j \subset \mathbb{R}^d \text{ et mesurable.}$$

On appelle *intégrale de $\varphi$ sur $\mathbb{R}^d$* la quantité, notée $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d$, définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_d(A_j) \in [0, +\infty].$$

Pour définir l'intégrale d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$, on utilise un procédé d'approximation : on cherche à écrire $f$ sous la forme $f = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n$ avec $\varphi_n : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ étagée et mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on pose ensuite $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n$.

**Proposition 1.2.1.** *Soit $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite $(\varphi_n : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées mesurables telles que*

1. *$0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ;*
2. *la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f$.*

*De plus, si $f$ est bornée sur $A \subset X$, la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $A$.*

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ de la façon suivante. Soit $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On appelle *intégrale* de $f$ la quantité, notée $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$, définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d \ : \ \varphi : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[ \text{ mesurable étagée et telle que } \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty].$$

Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est une partie mesurable, on pose $\int_A f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \mathbf{1}_A d\lambda_d$.
Nous pouvons maintenant étendre la définition de l'intégrabilité aux fonctions à valeurs réelles ou complexes (et ensuite à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$).

Soit$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Notons $f_+$ et $f_-$ les applications

$$f_+ = \max(f, 0) \text{ et } f_- = \max(-f, 0).$$

Les applications $f_+$ et $f_-$ sont mesurables, car $f$ l'est, et sont à valeurs dans $[0, +\infty[$. On a alors les relations

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-.$$

**Définition 1.2.2** (Fonction intégrable à valeurs réelles)**.** *Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite intégrable par rapport à la mesure $\lambda_d$, ou simplement intégrable, si $f$ est mesurable et si $\int_{\mathbb{R}^d} |f| d\lambda_d < +\infty$. Dans ce cas, on appelle intégrale de $f$ sur $\mathbb{R}^d$ le nombre réel, noté $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$, défini par*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f_+ d\lambda_d - \int_{\mathbb{R}^d} f_- d\lambda_d.$$

*On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions intégrables à valeurs réelles.*

Pour une fonction à valeurs complexes, son intégrale est tout simplement la somme de l'intégrale de sa partie réelle et de i fois l'intégrale de sa partie imaginaire.

### 1.2.2 Théorème de convergence dominée

Nous présentons le théorème de convergence dominée ou **TCD** en abrégé. Ce théorème affirme que $\int \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$ lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite simplement convergente de fonctions intégrables dominée par une fonction positive intégrable $g$ au sens suivant : $|f_n| \leq g$ pour tout $n$. Le fait qu'il suffise d'avoir une convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f$ est un grand progrès par rapport aux énoncés qui peuvent être rencontrés dans le cadre de l'intégrale de Riemann. D'une manière générale, le théorème de convergence dominée est, comme nous le verrons, d'une grande utilité pratique.

**Théorème 1.2.3** (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $(f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose que*

*(i) il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$ ;*

*(ii) il existe une fonction $g : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$.*

*Alors la fonction $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n| = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Dans la pratique, la fonction $f$ est souvent *définie* presque partout par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et prolongée arbitrairement à $\mathbb{R}^d$. La fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est mesurable comme limite simple presque partout d'une suite de fonctions mesurables. Le fait qu'il soit suffisant, dans l'énoncé du TCD, d'avoir une convergence simple presque partout et une domination presque partout est typique des théorèmes d'interversion limite-intégrale dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

**Exemple 1.2.4.** *Déterminons la limite lorsque n tend vers l'infini de la suite :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

*On a :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t) \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

*et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t) \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, $f_n(t)$ tend vers $\mathrm{e}^{-t^2}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. De plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{t^2}{n} \leq \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}}$, d'où*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1,\ |f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t^2}$$

*qui est indépendante de $n$ et intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc, on peut appliquer le TCD à $(f_n)_{n\geq 1}$ pour obtenir*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

### 1.2.3 Intégrales à paramètre

Le TCD implique les théorèmes suivants sur les intégrales à paramètres.

**Théorème 1.2.5** (Continuité sous le signe $\int$). *Soit $a \in \mathbb{R}^p$. On considère une fonction $f$ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, l'application partielle $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est mesurable.*
2. *Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, l'application partielle $x \mapsto f(x,y)$ est continue au point $a$.*
3. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $|f(x,y)| \leq g(y)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$.*

*Alors il est possible de définir une application $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$, et $F$ est continue au point $a$.*

**Exemple 1.2.6.** ***(Transformée de Fourier).*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, on pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, e^{-i(x|y)}\mathrm{d}y,$$

*où $(x|y)$ est le produit scalaire euclidien de $x$ et $y$. Alors $\hat{g}$ est continue sur $\mathbb{R}^p$.*

Après la continuité, nous étudions la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

**Théorème 1.2.7** (Dérivabilité sous le signe $\int$). *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On considère une fonction $f$ de $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $x \in \mathcal{O}$, l'application partielle $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est intégrable.*
2. *Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, l'application partielle $f_y : x \mapsto f(x,y)$ est de classe $C^1$ dans $\mathcal{O}$.*
3. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\forall i \in \{1,\dots,p\},\ \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\right| \leq g(y)$$

*pour tout $x \in \mathcal{O}$ et pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$.*

*Alors, il est possible de définir une fonction $F : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_d(y)$. Cette fonction est de classe $C^1$ dans $\mathcal{O}$, et ses dérivées partielles sont données par*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_d(y).$$

Joint au théorème de continuité précédent, le théorème de dérivation permet de montrer qu'une fonction est de classe $C^1$.

**Exemple 1.2.8.** ***(Transformée de Laplace).*** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On appelle transformée de Laplace de $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$F : x \mapsto \int_0^\infty e^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

*On montre que $F$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa limite en $+\infty$ est nulle.*

Nous sommes souvent amenés à démontrer la continuité ou la dérivabilité d'une fonction $F$ définie par une intégrale sur un intervalle ouvert $I$. Il arrive alors, comme c'est le cas pour démontrer la dérivabilité de la transformée de Laplace, que l'hypothèse de domination nécessaire à l'application d'un théorème de régularité sous le signe $\int$ ne soit pas vraie sur tout l'intervalle $I$, mais seulement sur des sous-intervalles de $I$. Dans ce cas, on utilise le fait que la régularité d'une fonction (sa continuité ou sa dérivabilité) est une notion locale. En effet, si une fonction est régulière au voisinage d'un point, elle l'est aussi en ce point. Si on veut démontrer la régularité de $F$ en tout point de $I$, on commence par fixer un point $a \in I$. Alors, comme $I$ est ouvert, $a$ possède un voisinage $]\alpha, \beta[$ contenu dans $I$, voisinage sur lequel on peut tenter de démontrer l'hypothèse de domination voulue. Si cela est possible, les théorèmes de régularité sous le signe $\int$ s'appliquent et on démontre que $F$ est régulière sur $]\alpha, \beta[$. En particulier, $F$ est régulière en $a$. Le point $a$ étant quelconque dans $I$, $F$ est régulière sur $I$.
Pour étudier des limites aux bords de l'intervalle ouvert où les théorèmes de régularité sous le signe $\int$ ne s'appliquent pas, comme la limite en $+\infty$ de la transformée de Laplace, on applique directement le théorème de convergence dominée ou celui de convergence monotone. On utilise pour cela la caractérisation séquentielle des limites.

**Exemple 1.2.9.** *Etudions la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Soit $f : (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ définie sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable car*

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

*Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n t^n \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}.$$

*Alors, pour tout $n \geq 1$, la fonction $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est continue en $x$ et intégrable en $t$ et on a, si $a > 0$,*

$$\forall x \geq a,\ \forall t \geq 0,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq t^n \mathrm{e}^{-at}$$

*qui est indépendante de $x$ et intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc, par le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, on en déduit que*

$$F : x \mapsto \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

*est de classe $C^\infty$ sur $[a,+\infty[$. Soit $x_0 > 0$. Il existe $a > 0$ tel que $x_0 \in [a,+\infty[$. Comme $F$ est de classe $C^\infty$ sur $[a,+\infty[$, elle l'est en $x_0$. Cela étant vrai pour tout $x_0 > 0$, $F$ est de classe $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$.*
*On remarque que l'on a de plus $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et on a*

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

*qui tend vers $0$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.*

### 1.2.4 Les espaces $L^p$

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $f$, mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, qui vérifient

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda_d < +\infty.$$

On appelle espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ l'espace des classes de fonctions égales presque partout qui sont dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Plus précisement, on définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ par :

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; f = g \text{ p.p.}$$

et on définit $L^p(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)/\sim$. On identifie ensuite la classe d'équivalence de $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ qui est un élément de $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec son représentant $f$.
Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \mathrm{d}\lambda_d\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors $||\cdot||_p$ est une norme sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour lequel cet espace est complet.

Dans les espaces $L^p$ ($1 \leq p < +\infty$) on a un théorème de convergence dominée en remplaçant "intégrable" par $g \in L^p$ et la convergence a alors lieu dans $L^p$.

**Proposition 1.2.10** (Inégalité de Hölder)**.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. Alors, pour tout $p \geq 1$, si $q$ est l'exposant conjugué de $p$,* i.e. *le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f^p(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} g^q(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}} \leq +\infty.$$

*Si le second membre est fini, l'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels $\gamma$ et $\delta$, non tous deux nuls, tels que l'égalité $\gamma f^p(x) = \delta g^q(x)$ ait lieu presque partout.*

**Corollaire 1.2.11.** *Soient $p$ et $q$ deux exposants conjugués. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, le produit $fg$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \, ||g||_q.$$

### 1.2.5 Théorème de Fubini

Lorsque l'on calcule l'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ de plusieurs variables, le premier outil auquel on doit penser est le théorème de Fubini. Celui s'énonce sous la forme suivante :

**Théorème 1.2.12.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^{d+p})$. Alors les fonctions suivantes sont définies presques partout*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\mathrm{d}y \quad \textit{et} \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\mathrm{d}x$$

*et sont respectivement dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^1(\mathbb{R}^p)$. De plus, on la relation :*

$$\int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dx\right) dy.$$

**Remarque 1.2.13.** *Le théorème reste vrai pour $f$ non forcément intégrable, mais positive (pour une fonction à valeurs réelles).*

### 1.2.6 Théorème du changement de variable

L'autre outil essentiel permettant de calculer une intégrale est le théorème de changement de variable.

On note pour $\varphi$ une fonction différentiable sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^d$ et pour $x \in U$, la Jacobienne de $\varphi$ en $x$ par $J_\varphi(x)$. C'est la matrice de la différentielle de $\varphi$ au point $x$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

**Théorème 1.2.14.** *Soit $\varphi : U \to V = \varphi(U)$ un $C^1$-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Alors,*

1. *Pour toute fonction $g$ mesurable et positive, $g : \varphi(U) \to [0, +\infty]$,*
$$\int_{\varphi(U)} g(x)\mathrm{d}x = \int_U g(\varphi(x))|\det(J_\varphi(x))|\mathrm{d}x.$$
2. *De plus, une fonction mesurable $f : \varphi(U) \to \mathbb{C}$ est intégrable sur $\varphi(U)$ si et seulement si $(f \circ \varphi)|\det(J_\varphi(\cdot))|$ est intégrable sur $U$ et on a*
$$\int_{\varphi(U)} f(x)\mathrm{d}x = \int_U f(\varphi(x))|\det(J_\varphi(x))|\mathrm{d}x.$$

Les changements de variable qui interviennent le plus souvent sont les changements en polaire et les changements de variable linéaires.
Pour le changement de variables en polaire on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{]0,2\pi[\times]0,+\infty[} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Cela donne en dimension $d$ :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1,\ldots,x_d)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d = \int_{S(0,1)\times]0,+\infty[} g(r,\theta_1,\ldots,\theta_{d-1})r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{d-1}$$

où

$$g(r,\theta_1,\ldots,\theta_{d-1}) = f(r\cos(\theta_1), r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2),\ldots, r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{d-2})\cos(\theta_{d-1}), r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{d-2})\sin(\theta_{d-1})).$$

En effet, le changement en polaire en dimension 2 est donné par le difféomorphisme $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ dont le Jacobien en tout point est donné par :

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

**Exemple 1.2.15.** *Calculons l'intégrale gaussienne : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$. Pour cela on commence par utiliser Fubini pour justifier que*
$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
*Puis on effectue un changement de variables en polaires :*

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^\infty = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi.$$

*Donc : $I = \sqrt{\pi}$.*

**Exemple 1.2.16.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,*

1. $\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x$ *est convergente si et seulement si* $\alpha < d$.
2. $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > d$.

*En effet, il suffit d'effectuer un changement de variables en polaires pour se ramener au cas du critère de Riemann en dimension* $1$. *On a alors, avec* $dx = r^{d-1} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x = \int_{S(0,1)} \int_0^1 \frac{1}{r^\alpha} r^{d-1} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

*La convergence de cette intégrale revient donc à celle de* $\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1-d}} \mathrm{d}r$ *et par le critère de Riemann, elle converge si et seulement si* $\alpha + 1 - d < 1$ *donc* $\alpha < d$. *Idem pour l'autre cas.*

Lorsque l'on utilise Fubini ou le changement de variable on procède en général en deux temps : on applique la version pour les fonctions positives à $|f|$ pour justifier de l'intégrabilité puis on utilise à nouveau le théorème pour faire le calcul effectif de l'intégrale. Rappelons aussi que ces théorèmes, tout comme l'IPP ne permettent pas de calculer directement une intégrale en général (sauf cas particuliers) mais permettent juste de se ramener à un calcul de primitive usuelle.

Pour l'ensemble des démonstrations et plus de précisions sur la théorie de l'intégrale de Lebesgue, nous renvoyons à [4].