Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
SMA Semestre VI
Distributions

Théorie des Distributions

Ce document est constitué d'extraits de cours (publiques) disponibles sur la toile.

Chapitre 4

Distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$

La théorie des distributions a été introduite par Laurent Schwartz en 1945, posant les idées qui étaient déjà en germe chez Sobolev dans les années 30. La représentation des phénomènes physiques étendus dans l'espace par des fonctions de plusieurs variables et l'expression des lois physiques en termes d'équations aux dérivées partielles ont été un grand progrès dans l'étude de ces phénomènes. Toutefois, cette représentation par une fonction assignant une valeur en chaque point pose au moins deux problèmes d'ordre physique.

Le premier est que les quantités physiques *en un point* n'ont pas de sens. Par exemple, la température est une conséquence du mouvement des molécules. Dans un volume plus petit que le libre parcours moyen d'une molécule, parler de température en un point précis ne signifie donc rien. Pourtant, l'équation de la chaleur classique donne, à l'échelle macroscopique, des résultats qui sont conformes aux expériences.

Le second est qu'une valeur ponctuelle pour une quantité physique est impossible à mesurer avec un appareil de mesure. Ce dernier a nécessairement une certaine étendue spatiale et ne pourra donc jamais fournir une valeur $f(x_0)$ d'une fonction f en un point x_0. Le mieux que l'on puisse obtenir est une moyenne pondérée $\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ où φ caractérise l'appareil de mesure et est supportée au voisinage de x_0 avec une intégrale proche de 1 pour un appareil précis et bien réglé.

Dans ce chapitre nous allons systématiser l'idée qui consiste à ne plus considérer des fonctions définies point par point, mais globalement, par des moyennes locales. Nous allons donc substituer aux fonctions classiques des formes linéaires sur l'espace des fonctions test. Nous avons déjà vu cette idée se dessiner dans le chapitre 2.

Un des buts de cette théorie est d'apporter un sens à des objets abstraits comme l'impulsion de Dirac, mais aussi de pouvoir "dériver" des fonctions qui ne sont pas dérivables, comme par exemple des fonctions L^1 ou L^2 ou seulement continues. Nous verrons comment cela peut nous aider à résoudre des problèmes d'EDP qui n'ont pas a priori de solutions classiques simples.

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

4.1 Définitions

Nous allons donner deux définitions équivalentes de la notion de distribution, l'une fonctionnelle et théorique dans laquelle la continuité est exprimée topologiquement, une autre effective dans laquelle la continuité est exprimée directement par des estimations.

4.1.1 Définition fonctionnelle

Définition 4.1.1. *Une distribution sur l'ouvert Ω est une forme linéaire $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ continue en* 0, i.e. *telle que, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers* 0, $< T, \varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

Le symbole $< T, \varphi_n >$ désigne ici un crochet de dualité, il signifie simplement l'action de T sur φ_n : $T(\varphi_n)$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ n'est autre que le dual topologique de $C_0^\infty(\Omega)$.
La convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$ étant une condition très contraignante, la condition de continuité vis-à-vis de cette topologie est très forte et cela impliquera donc de nombreuses propriétés pour les distributions.
Cette définition abstraite des distributions pourra être utilisée pour des questions théoriques, mais pour montrer en pratique qu'une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution, nous lui préfèrons la définition qui suit.

4.1.2 Définition par l'ordre

Proposition 4.1.2. *Une forme linéaire T sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution sur Ω si et seulement si, pour tout compact K de Ω, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C_{K,m} > 0$ tels que, pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que* supp $\varphi \subset K$,

$$| < T, \varphi > | \leq C_{K,m} \max_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Notation. On pourra noter $p_m(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$.

Démonstration : Supposons que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Fixons un compact $K \subset \Omega$ sur lequel :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \exists \varphi \in C_K^\infty(\Omega),\ | < T, \varphi > | > C p_m(\varphi).$$

Prenons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $C = m$. Il existe alors $\varphi_m \in C_K^\infty(\Omega)$, $| < T, \varphi_m > | > m p_m(\varphi_m)$. Posons $\tilde\varphi_m = \frac{\varphi_m}{< T, \varphi_m >}$. Alors, $< T, \tilde\varphi_m >= 1$ et supp $\tilde\varphi_m \subset K$. De plus,

$$p_m(\tilde\varphi_m) = \frac{p_m(\varphi_m)}{< T, \varphi_m >} < \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, $\forall m \geq k$, $p_k(\tilde\varphi_m) \leq p_m(\tilde\varphi_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Cela signifie exactement que la suite $(\tilde\varphi_m)$ tend vers 0 dans $C_0^\infty(\Omega)$. Or, $< T, \tilde\varphi_m >= 1$ ne tend pas vers 0 ce qui contredit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Montrons la réciproque. Soit (φ_n) une suite qui converge vers 0 dans $C_0^\infty(\Omega)$. Soit K un compact qui contient tous les supp φ_n. Par définition de la convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$ on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $p_m(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors : $| < T, \varphi_n > | \leq C_{K,m} p_m(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

□

Cette caractérisation des distributions sera constamment utilisée par la suite. Elle mène aussi directement à la notion d'ordre d'une distribution.

4.1.3 Ordre d'une distribution

Dans la définition d'une distribution, l'entier m dépend a priori du choix du compact K. Si on peut trouver un entier m qui convient pour tous les compacts K de Ω, on dira que la distribution est d'ordre fini.

Définition 4.1.3. *Une forme linéaire T sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution **d'ordre fini au plus m** sur Ω lorsqu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ telle que, pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, supp $\varphi \subset K$,*

$$|< T, \varphi >| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Le plus petit entier m possible est appelé l'ordre de la distribution T.

L'ordre de T est le plus petit nombre de dérivées qu'il nous faut pour contrôler l'action de T sur les fonctions test.
Nous allons maintenant donner quelques exemples de distributions en précisant à chaque fois leur ordre.

4.2 Premiers exemples

4.2.1 Distribution associée à une fonction L^1_{loc}

Une des premières choses à vérifier est que la théorie des distributions généralise bien la théorie des fonctions classiques, typiquement des fonctions intégrables. On va donc montrer comment les fonctions $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ s'injectent dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposition 4.2.1. *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On peut lui associer une distribution sur $C_0^\infty(\Omega)$, notée T_f, telle que*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < T_f, \varphi >= \int_\Omega f \varphi \mathrm{d}x.$$

Cette distribution est d'ordre 0.

Démonstration : Tout d'abord, on vérifie que, comme f est $L^1_{loc}(\Omega)$, sa restriction à tout compact est L^1. Ainsi, sur le support de $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, elle est L^1. Comme φ est bornée, car continue sur le compact où elle est supportée, on en déduit que $f\varphi$ est L^1, et que

$$\left| \int_\Omega f \varphi \mathrm{d}x \right| \leq \max_{x \in \text{supp } \varphi} |\varphi(x)| \int_{\text{supp } \varphi} |f| \mathrm{d}x.$$

La forme linéaire $\varphi \to \int_\Omega f \varphi dx$ est donc bien une distribution, qui plus est d'ordre au plus 0, donc d'ordre 0.

□

Par ailleurs, le lemme de Dubois-Reymond nous permet d'identifier T_f à la fonction f de manière unique. L'application $f \mapsto T_f$ est une injection de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dans la suite nous ferons donc presque toujours l'abus de langage qui consiste à identifier T_f à f. Nous écrirons par exemple "soit f la distribution...".

4.2.2 Distribution de Dirac

Nous avons déjà rencontré cette distribution au chapitre 2. Nous allons maintenant en donner sa définition précise.

Définition 4.2.2. *Soit $a \in \Omega$. La forme linéaire $\delta_a : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$$

est une distribution sur Ω, d'ordre 0.

Démonstration : Soit K un compact de Ω et soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que supp $\varphi \subset K$. Alors, $| < \delta_a, \varphi > | \leq 1 \cdot ||\varphi||_\infty$. Donc δ_a est une distribution d'ordre au plus 0 donc 0 sur Ω.

□

La distribution de Dirac est un nouvel objet de la théorie des distributions. En effet, on peut montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$. Si cela était le cas, en fixant un compact $K \subset \Omega$, on aurait :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \text{supp } \varphi \subset K,\ < \delta_a, \varphi >= \varphi(a) = \int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Alors, si $a \notin$ supp φ, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Donc, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{a\})$, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Par le lemme de Dubois-Reymond, $f = 0$ pp sur $\Omega \setminus \{a\}$, donc sur Ω. Mais alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_K 0 \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = 0 = \varphi(a)$. En choisissant φ telle que $\varphi(a) \neq 0$ on aboutit à une contradiction.

4.2.3 Distribution de Dirac dérivée

Nous pouvons aussi définir sur le modèle de la distribution de Dirac une distribution d'ordre fini de n'importe quel ordre. Soient $a \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Posons, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$< T, \varphi >= \partial^\alpha \varphi(a).$$

Montrons que T ainsi définie est une distribution d'ordre exactement $|\alpha|$. Tout d'abord, il est clair que c'est bien une distribution d'ordre au plus $|\alpha|$. En effet, si K est un compact de Ω, on a

$$| < T, \varphi > | = |\partial^\alpha \varphi(a)| \leq ||\partial^\alpha \varphi||_\infty.$$

Soit $k < |\alpha|$. Montrons que T n'est pas d'ordre k. On raisonne par l'absurde. Supposons que, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \text{supp } \varphi \subset K,\ |\partial^\alpha \varphi(a)| \leq C_K \max_{|\beta| \leq k} ||\partial^\beta \varphi||_\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et prenons comme compact $K = \overline{B(a, \varepsilon)}$. Fixons $\psi_0 \in C_0^\infty(B(0, \varepsilon))$ telle que $\psi_0(x) = 1$ pour $|x| \leq \varepsilon/2$. Posons alors $\psi(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha!}\psi_0(x)$. Par la formule de Leibniz, on a $\partial^\alpha \psi(0) = \psi_0(0) = 1$. Posons enfin $\varphi(x) = \psi(\lambda(x-a))$ où $\lambda \geq 1$. Comme supp $\varphi \subset B(a, \frac{\varepsilon}{\lambda}) \subset B(a, \varepsilon) \subset K$, on a bien supp $\varphi \subset K$. De plus, $\partial^\alpha \varphi(a) = \lambda^{|\alpha|}\partial^\alpha \psi(0) = \lambda^{|\alpha|}$. Pour $|\beta| \leq k$,

$$|\partial^\beta \varphi(x)| = \lambda^{|\beta|}|\partial^\beta \psi(\lambda(x-a))| \leq \lambda^k ||\partial^\beta \psi||_\infty.$$

Alors, pour tout $\lambda \geq 1$, on devrait avoir,

$$\lambda^{|\alpha|-k} \leq C_K \max_{|\beta| \leq k} ||\partial^\beta \psi||_\infty < +\infty.$$

On aboutit à une contradiction en faisant tendre λ vers $+\infty$ puisque $|\alpha| - k \geq 1$. Donc T ne peut pas être d'ordre $k < |\alpha|$, donc T est d'ordre exactement $|\alpha|$.

4.2.4 Mesures de Radon

Soit μ une mesure de Radon sur Ω. La forme linéaire $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \mapsto \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\mu$ est une distribution d'ordre 0 sur Ω.

Théorème 4.2.3. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre 0. Alors, il existe une mesure de Radon μ sur Ω telle que*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < T, \varphi >= \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration : On admettra ce théorème. La démonstration se base sur le fait que les mesures de Radon positives sur Ω s'identifient aux formes linéaires positives sur $C_0(\Omega)$ par

$$\mu \mapsto \left(f \in C_0(\Omega) \mapsto \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \right).$$

C'est le théorème de représentation de Riesz.

□

4.2.5 Distributions positives

On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est positive lorsque :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0 \ \Rightarrow < T, \varphi >\geq 0.$$

Montrons que toute distribution positive est d'ordre 0.

En effet, soit K un compact de Ω et soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi = 1$ sur K et $0 \leq \chi \leq 1$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, supp $\varphi \subset K$ et φ réelle, alors les fonctions $\psi_\pm : x \mapsto \chi(x) \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \pm \varphi(x)$ sont dans $C_0^\infty(\Omega)$ et sont positives. Alors, $< T, \psi_\pm >\geq 0$. D'où,

$$| < T, \varphi > | \leq | < T, \chi > | \cdot \sup_{x \in K} |\varphi(x)| = C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

ce qui signifie que T est d'ordre au plus 0 donc d'ordre 0.

4.2.6 La valeur principale de $\frac{1}{x}$

La fonction inverse, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, on ne peut donc pas définir à partir de cette fonction une distribution comme on l'a fait auparavant. Cependant, en prenant garde à éviter la singularité en 0 et en effectuant une intégration "symétrique" par rapport à 0, on va tout de même pouvoir associer une distribution à f.

Définition 4.2.4. *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On pose*

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Alors vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ *est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre exactement* 1.

Démonstration : Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et supposons que $K \subset [-a, a]$ pour a un réel positif. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que supp $\varphi \subset K$. Alors,

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x| \leq a} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Pour “annuler” la singularité en 0, l’idée est de faire un développement de Taylor de φ en 0. Par la formule de Taylor avec reste intégral, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x),\ \text{avec}\ \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t,\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R})\ \text{et}\ |\psi(x)| \leq ||\varphi'||_\infty.$$

On écrit alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon<|x|\leq a} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \varphi(0)\int_{\varepsilon<|x|\leq a} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon<|x|\leq a} \psi(x)\mathrm{d}x := I_1 + I_2.$$

Par imparité de la fonction f et symétrie par rapport à 0 du domaine d’intégration, l’intégrale I_1 est nulle. Dans l’intégrale I_2, la fonction ψ étant continue en 0, on peut appliquer le TCD pour obtenir que la limite lorsque ε tend vers 0 de I_2 existe et vaut $\int_{|x|\leq a} \psi(x)\mathrm{d}x$. La définition de vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc justifiée, la limite existe et on a :

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int_{|x|\leq a} \psi(x)\mathrm{d}x.$$

De plus,

$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq 2a \times \sup_{x\in K} |\varphi'(x)|.$$

On en déduit que vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d’ordre au plus 1. Il nous reste à justifier qu’elle ne peut pas être d’ordre 0. Si elle était d’ordre 0 on aurait l’existence d’une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \mathrm{supp}\ \varphi \subset K,\ \left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq C||\varphi||_\infty.$$

Pour $n \geq 1$, on considère la fonction plateau qui vaut 1 sur le compact $[\frac{1}{n}, 1]$ et qui est nulle hors de l’ouvert $]\frac{1}{2n}, 2[$. Alors, $||\varphi_n||_\infty = 1$ et, pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2n}$, on a (par positivité de φ_n)

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x}\mathrm{d}x \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\varphi_n(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log n.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\log n \leq \left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq C||\varphi_n||_\infty = C.$$

D’où la contradiction lorsque $n \to \infty$.

$\square$

Comme vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est d’ordre 1 on en déduit en particulier qu’il n’existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que vp $\left(\frac{1}{x}\right) = T_f$.
Cette distribution apparaîtra à nouveau plus loin dans le cours et en TDs. Tout comme la distribution de Dirac, elle constitue un des premiers exemples d’objets nouveaux introduits par la théorie des distributions.

4.2.7 Partie finie de x^α

On peut chercher à continuer à intégrer des fonctions non intégrables, par exemple x^α pour $-2 < \alpha < -1$ et $x > 0$. On vérifie que

$$\int_\varepsilon^a x^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^a x^\alpha \varphi(0)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^a x\varphi'(0)\mathrm{d}x + ...$$

(sans préciser le reste de Taylor). Le premier terme vaut $\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Il s'agit de la partie infinie de x^α. Plus précisément, on a l'égalité, valable pour φ à support compact et $a \notin \mathrm{supp}\varphi$:

$$\int_\varepsilon^a x^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(x)\right]_\varepsilon^a - \int_\varepsilon^a \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^a \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

La fonction $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est, quant à elle, intégrable car $\alpha + 1 > -1$, donc définit une distribution. On voit donc apparaitre la partie finie.

Définition 4.2.5. *La partie finie de x^α, notée $\mathrm{Pf}(x^\alpha)$ est la distribution définie par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < \mathrm{Pf}(x^\alpha), \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(\varepsilon)\right) = -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

On peut définir de même $\mathrm{Pf}(x^\alpha)$ pour $\alpha \in]-n-1, -n[$, grâce à

$$< \mathrm{Pf}(x^\alpha), \varphi >= (-1)^n \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+1)...(\alpha+n)}\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x.$$

Il existe d'autres façons de définir les parties finies. Par exemple, lorsque $-n-1 < \alpha < -n$, $n \geq 1$, on retranche la partie infinie obtenue en écrivant le développement de Taylor de φ à l'ordre $n-1$, soit

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!}\varphi^{(j)}(0) + x^n \psi_n(x)$$

et on calcule ainsi la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$, de

$$\int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{\alpha+j+1}}{(j+\alpha+1)j!}\varphi^{(j)}(0).$$

Cette limite est notée $< \mathrm{Pf}(x^\alpha), \varphi >$ et définit une distribution d'ordre n. Les cas $\alpha = -n$ donnent les valeurs principales. Par exemple, pour $\alpha = -2$, en pensant à intégrer de manière symétrique comme pour la valeur principale de $\frac{1}{x}$, on obtient

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} = \int_\varepsilon^\infty \int_0^1 (1-t)[\varphi''(xt) + \varphi''(-xt)]\mathrm{d}t.$$

Le membre de droite définit, à la limite $\varepsilon \to 0$, une distribution d'ordre 2, qui est la partie finie de $\frac{1}{x^2}$ en valeur principale.

4.2.8 Un exemple de distribution d'ordre infini

Soit T la forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < T, \varphi >= \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^{(j)}(j).$$

Alors, T est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini. On peut reprendre en l'adaptant légèrement la preuve donné pour la distribution de Dirac dérivée.
Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, supp $\varphi \subset [-a, a]$. Posons $p_0 = E(a) + 1$, où $E(a)$ est la partie entière de a. On a :

$$| < T, \varphi > | = \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^{(j)}(j) \right| = \left| \sum_{j=0}^{p_0} \varphi^{(j)}(j) \right| \leq \sum_{j=0}^{p_0} ||\varphi^{(j)}||_\infty.$$

Donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Supposons par l'absurde que T est d'ordre fini m. Soit $\psi_0 \in C_0^\infty(]-1/2, 1/2[)$, égale à 1 sur $[-1/4, 1/4]$ et positive. Soit $\lambda > 1$. Posons $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \psi(\lambda(x - (m+1)))$. On considère le compact $K = [m + 1/2, m + 3/2] \subset \mathbb{R}$. Comme $\lambda > 1$, φ est à support dans K et elle est C^∞.
D'autre part, par la formule de Leibniz, on a : $\psi^{(m+1)}(0) = \psi_0(0) = 1$. Puis, comme supp $\varphi \subset K$, on a $< T, \varphi >= \varphi^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1}\psi^{(m+1)}(0) = \lambda^{m+1}$. D'autre part, pour $j \leq m$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty.$$

Or, T est supposée d'ordre m, donc pour $K = [m + 1/2, m + 3/2]$, il existe $C_K > 0$ telle que

$$| < T, \varphi > | \leq C_K \sum_{j=0}^{m} ||\varphi^{(j)}||_\infty,$$

soit ici :

$$\lambda^{m+1} \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty \leq C_K \left(\sum_{j=0}^{m} \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty \right) \lambda^m.$$

Or cela conduit à une contradiction lorsque λ tend vers l'infini car on a :

$$\lambda \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty < +\infty.$$

Donc T ne peut être d'ordre fini.

4.3 Convergence des suites de distributions

Nous allons voir que les suites de distributions étant des suites d'applications linéaires continues, elles se comportent de manière très "simple". Cela est principalement dû au théorème de Banach-Steinhaus qui est un résultat d'uniformisation des bornes sur les familles de formes linéaires continues sur un espace de Banach (voir [4], Chapitre 17). Commençons par donner la définition de la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 4.3.1. *On dit qu'une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de distributions sur Ω converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\lim_{n \to \infty} < T_n, \varphi >=< T, \varphi > .$$

Exemple 4.3.2. *La suite de distributions $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1,\ T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$, converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $-2\delta_0'$. En effet, pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\mathrm{d}u$. Alors,*

$$< T_n, \varphi >= n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\psi(0) = 2\varphi'(0).$$

D'où le résultat.

Exemple 4.3.3. *La suite $(T_{e^{in\cdot}})_{n\geq 0}$ converge vers la distribution nulle dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il s'agit juste du lemme de Riemann-Lebesgue.*

Proposition 4.3.4. *La convergence dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ qui converge vers f dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $K \subset \Omega$ un compact et soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, supp $\varphi \subset K$. Par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} | < T_{f_n}, \varphi > - < T_f, \varphi > | &= | < T_{f_n} - T_f, \varphi > | \leq \int_K |f_n(x) - f(x)| \cdot |\varphi(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq ||f_n - f||_{L^p(K)} ||\varphi||_{L^q(K)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

□

Exemple 4.3.5. *La convergence presque partout n'implique pas la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, considérons la suite de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ définie par $f_n : x \mapsto \sqrt{n}e^{-nx^2}$. Alors, pour tout $x \neq 0$, $f_n(x) \to 0$, mais la suite $(T_{f_n})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers $\sqrt{\pi}\delta_0$ et non pas vers la distribution nulle. En effet, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a par le TCD,*

$$< f_n, \varphi >= \sqrt{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\pi}\varphi(0) =< \sqrt{\pi}\delta_0, \varphi > .$$

On a le théorème suivant dont la démonstration (difficile et basée sur Banach-Steinhaus) est admise ici (voir [1, C.3.4, p245] ou [6, p58]).

Théorème 4.3.6 (Admis)**.** *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions telle que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, la suite $(< T_n, \varphi >)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$. Alors la forme linéaire T définie sur $C_0^\infty(\Omega)$ par*

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < T, \varphi >= \lim_{n\to+\infty} < T_n, \varphi >$$

est une distribution sur Ω. De plus, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que,

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \mathrm{supp}\ \varphi \subset K,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} | < T_n, \varphi > | \leq Cp_m(\varphi).$$

Le point clé ici est le fait que l'on peut trouver une constante $C > 0$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ indépendants de n. On a aussi le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.7. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$. Alors $< T_n, \varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} < T, \varphi >$.*

Nous allons montrer au chapitre sur la convolution des distributions que toute distribution est limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une suite de fonctions dans $C_0^\infty(\Omega)$.

Nous terminons cette section par un résultat d'approximation de la distribution de Dirac en 0 par des fonctions L^1.

Proposition 4.3.8. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, dont les supports sont contenus dans des boules centrées à l'origine et de rayon tendant vers 0. Alors*

$$\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} f_n \mathrm{d}x} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_0 \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration : Soit a_n le rayon de la boule, $a_n \to 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En posant $x = a_n t$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ < f_n, \varphi >= a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)\varphi(a_n t)\mathrm{d}t.$$

On écrit

$$\frac{< f_n, \varphi >}{< f_n, 1 >} - \varphi(0) = \frac{a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)(\varphi(a_n t) - \varphi(0))\mathrm{d}t}{a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)\mathrm{d}t}.$$

On utilise ensuite le fait que, pour $a_n < 1$ et $|t| \leq 1$, par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$|\varphi(a_n t) - \varphi(0)| \leq a_n \max_{|\alpha|=1} \max_{|x|\leq 1} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

pour trouver

$$\left|\frac{< f_n, \varphi >}{< f_n, 1 >} - \varphi(0)\right| \leq a_n \max_{|\alpha|=1} \max_{|x|\leq 1} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

D'où le résultat.

□