Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences Meknès
Département de Mathématiques et Informatique

Année universitaire: 2019-2020
Filière: SMA S6
Module: Prob et Proc Stoch
Prof: Boumour Souhail

TD 2

Exercice 1

Soit X et Y deux v.a indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$.

1) Déterminer $P(X = Y)$.

2) En utilisant la symétrie: $P(X \geq Y) = P(X \leq Y)$ et la question 1), déterminer $P(X \geq Y)$.

3) Déterminer la loi de $Z = X + Y$, (discuter les cas: $k \leq n$ et $k > n$).

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire telle que

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. a. Calculer, à l'aide du théorème du transfert , la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

   b. Calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$, puis en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et V(X) .

   c. (*) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left(\frac{X!}{(X-k)!}\mathbf{1}_{X\geq k}\right) = \lambda^k$.

2.a. On définit la variable aléatoire $Y = 2^{-X}$. Après avoir justifié son existence, calculer $\mathbb{E}(Y)$. La variable aléatoire Y est-elle intégrable ?

b. Justifier que Y est une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble dénombrable $\mathcal{S}$ que l'on précisera, puis donner la loi de Y sous la forme d'une combinaison linéaire de mesures de Dirac.

c. Justifier que la variable aléatoire $Y' = (-2)^{-X}$ est intégrable, puis calculer son intégrale.

3. (*) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \begin{cases} X/2 & \text{si } X \text{ est pair} \\ (1-X)/2 & \text{si } X \text{ est impair} \end{cases}$.

   Aide : on pourra observer que Z est un entier relatif presque sûrement et distinguer le cas des valeurs négatives et le cas des valeurs positives.

4. (*) Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$U = 4\left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1$$

   Aide : on pourra remarquer que U ne prend que 2 valeurs.

Exercice 3

On rappelle que la fonction génératrice des moments g_X de la v.a.d entière X est la fonction $g_X : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par:

$$g_X(s) = E(s^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P(X=n).$$

Calculer g_X et en déduire la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$ dans les cas suivants:

1) $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, en particulier $X \sim \mathcal{B}(p)$.

2) $X \sim Geo(p)$.

3) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 4

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{P}(1)$ deux v.a indépendantes. On pose $Z = XY$.

1) Trouver la loi de Z, (discuter les cas: $k=0$ et $k \neq 0$).

2) En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

3) Calculez la fonction génératrice des moments de Z.

4) Retrouver les résultats de la question 2).

Exercice 5

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\beta)$ deux v.a indépendantes.

1) Calculer, de deux manières différentes, la loi de $Z = X+Y$.

2) En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 6

Soit $X \sim Geo(p)$ et $Y \sim Geo(q)$ deux v.a indépendantes tel que $(p+q-pq) \in]0,1[$. On cherche la loi de la v.a $Z = \min(X,Y)$.

1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X \geq k)$.

2) En déduire $P(Z \geq k)$ et la fonction de répartition de Z.

3) Quelle est la loi de Z?

4) Calculer $P(X < Y)$.

Exercice 7

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a entières i.i.d et N une v.a entière indépendante de la suite $(X_n)_n$. On pose

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + ... + X_N & \text{si } N \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } N = 0. \end{cases}$$

1) En remarquant que $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{\{N=n\}} = 1$, Montrer que: $g_S = g_N \circ g_{X_1}$.

2) En déduire la loi de S si $N \sim Geo(p)$ et $X_1 \sim Geo(q)$.