Chap 2 Statique des fluides

L'hydrostatique, ou statique des fluides, est l'étude des fluides immobiles. Fondée par Archimède, c'est un cas de la mécanique des fluides riche d'enseignements.

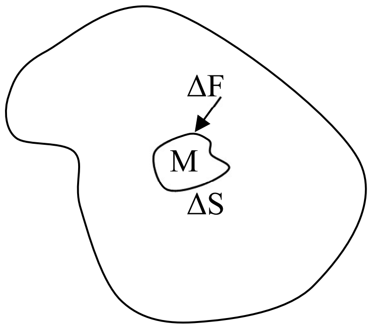
Définition de la pression

Pression en un point

Soit un corps ($\mathcal{C}$). Considérons l'élément de surface (ΔS) entourant le point M. Sur ΔS agit l'élément de force ΔF normal à l'élément de surface.

On définit la pression P agissant au point M comme étant :

$$P = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$



Pression moyenne agissant sur une surface

$F = \int PdS = \overline{P}.S$ avec $\overline{P}. = \frac{1}{S}\int PdS = \frac{F}{S}$. Si P est constante dans ce cas on aura $\overline{P} = P$

Isotropie de la pression

Nous allons voir que le scalaire P ne dépend pas de son orientation mais uniquement de la position M. Considérons un élément de volume cylindrique d'un fluide au repos limité par une section droite dS et une section oblique dS'.

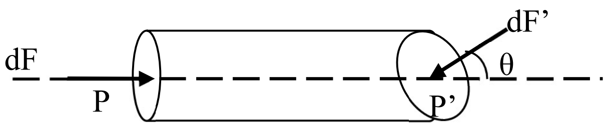


Figure II. 1 Forces appliquées à l'élément de volume cylindrique

Avec $dF=PdS$ et $dF'=P'.dS'$. le fluide étant en équilibre, si on fait le bilan des forces suivant ox : $\sum d\vec{F} = \vec{0} /^{t}_{x} \Rightarrow dF\text{-}dF'\cos\theta=0 \Rightarrow PdS\text{-}P'\cos\theta dS'=0$ or $dS= \cos\theta dS'$ donc $P=P'$

En un point d'un fluide au repos, la pression est la même dans toutes les directions.

Loi fondamentale de l'hydrostatique

Cas général

Considérons un élément de volume parallélépipédique, suivant un repère orthonormé (O,x,y,z) et dont la masse élémentaire $dm = \rho dxdydz$.

L'élément de volume du fluide est sous l'effet de 2 types de forces : force de volume et force de surface.

Soit $\vec{F}$ la résultante des forces de volume, de composante (X,Y,Z) suivant (o,x,y,z) agissant sur l'unité de masse du fluide considéré.

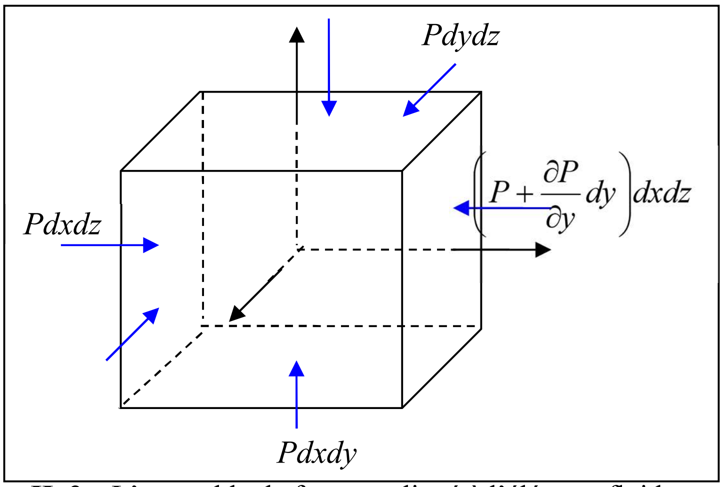


Figure II. 2 L'ensemble de force appliqué à l'élément fluide

$$\vec{F}\cdot dm = \vec{F}\cdot \rho dxdydz = \begin{pmatrix} X\cdot \rho dxdydz \\ Y\cdot \rho dxdydz \\ Z\cdot \rho dxdydz \end{pmatrix}$$

Le bilan de forces suivant les trois axes considérés se présente comme suit :

$$\text{Suivant ox : } Pdydz - \left(P+\frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz$$

$$\text{Suivant oy : } Pdxdz - \left(P+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dxdz = -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz$$

$$\text{Suivant oz : } Pdxdy - \left(P+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)dxdy = -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz$$

A l'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$$\text{Suivant ox : } X\rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = 0 \Rightarrow X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Suivant oy : $Y\rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial y} dxdydz = 0 \Rightarrow Y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$

Suivant oz : $Z\rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial z} dxdydz = 0 \Rightarrow Z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P}$$ **Loi de la statique des fluides**.

Force de volume et champ de pesanteur

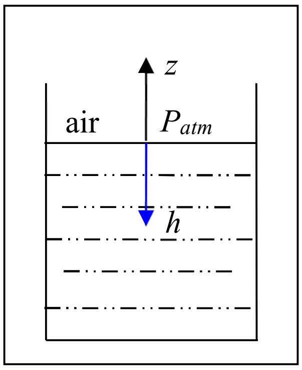
Dans ce cas particulier et qu'est le but de ce chapitre, on a :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ Y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ Z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -g \end{pmatrix}$$

Les deux premières équation du système, nous informe que $P(x,y)=cst$, ainsi sur le plan (x,y) les pressions sont constantes ou ils forment des surfaces isobares.

a- Fluide incompressible

Suivant la verticale, la pression varie selon la loi :



$\frac{dP}{dz} = -\rho g$ après un changement de variable z=-h on aboutit à :

$\frac{dP}{dh} = \rho g \Rightarrow P = \rho gh + cste$. A $h=0 \Rightarrow P = P_{atm} \Rightarrow cste = P_{atm}$

$\boldsymbol{P = \rho gh + P_{atm}}$:la **loi de l'hydrostatique ou loi de Pascal**

b- Fluide compressible

On prend le cas d'un gaz parfait, et $T=cste$. Pour déterminer ρ on utilise l'équation d'état :

$$PV = nRT$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow P\frac{m}{\rho} = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{M}{RT}P \text{ donc } \frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT}P$$

A $z=0$ $P=P_{atm} \Rightarrow Log\frac{P}{P_{atm}} = -\frac{Mg}{RT}z \Rightarrow P(z) = P_{atm}e^{-\frac{Mg}{RT}z}$

C'est l'équation de la pression barométrique.

Mesure de pression

Les différents types de pression

a- Pression absolue

Elle est toujours positive, c'est la *somme* de la *pression relative* ou manométrique (pression mesurées en un point donné) et la *pression atmosphérique locale* ou pression barométrique.

$$P_{ab}=P_{rel}+P_{atm}$$

b- Pression relative

C'est la pression lue au manomètre, elle est comptabilisée à partir de $P_{atm}=0$, elle peut être positive ou négative.

c- Pression atmosphérique locale

C'est la pression lue au baromètre, elle varie suivant l'altitude et de la température.

d- Pression atmosphérique standard

C'est la pression moyenne mesurée par rapport au niveau de la mer, et définie par :

$$P_{atm} = 1\ _{atm} = 10^5\ Pa = 760\ mm\ Hg = 10,34\ m \text{ d'eau à } T \approx 24°C$$

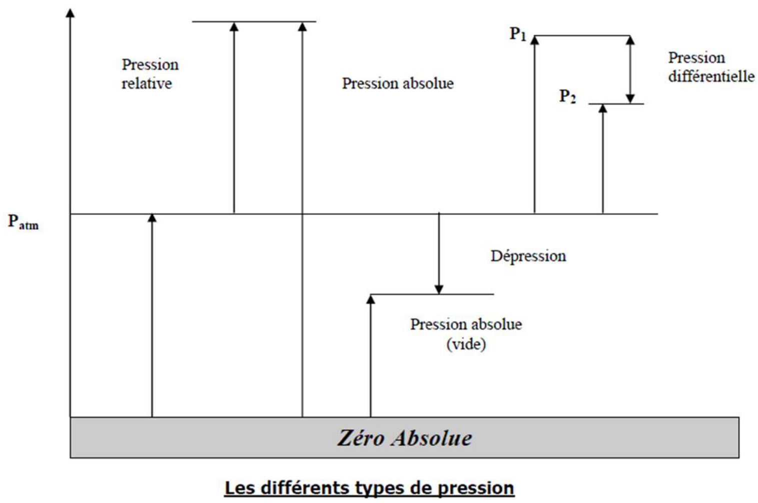


Figure II. 3 Les différents types de pression

Instrument de mesure de pression

a- Baromètre à Mercure (Torricelli 1643)*

D'après la loi de l'hydrostatique : $P_A=P_B=P_{atm}$

$P_B=\rho_{Hg}gh+P_c \Rightarrow P_{atm}=\rho_{Hg}gh=\gamma_{Hg}h$

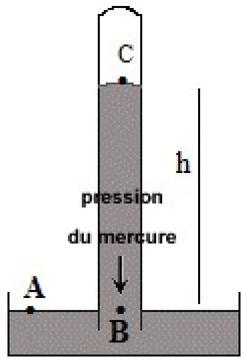


Figure II. 4 Baromètre à Mercure

b- Piézomètre

On s'en sert pour mesurer la pression relative, (on se fixe un niveau référentiel) On considère le point B comme étant le niveau de référence,

$P_A=\rho_{liq}gh$; la pression peut s'exprimer en colonnes de liquide par :

$$h_{liq}=\frac{P_A}{\rho_{liq}g}=\frac{P_A}{\gamma_{liq}}$$

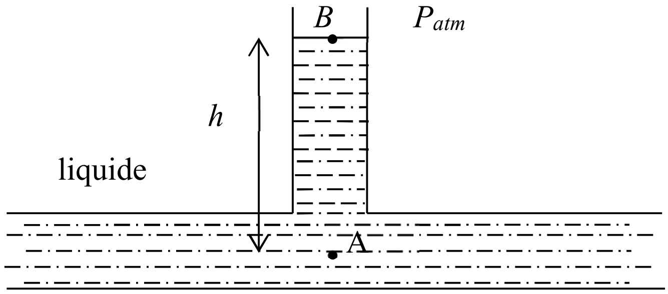


Figure II. 5 Piézomètre

c- Piézomètre à liquides différents

Lorsque h est très grand, on utilise un liquide de γ plus élevé (Mercure) pour diminuer l'amplitude. Utilisons de la loi de l'hydrostatique :

$$P_B=P_A+\gamma_{liq}h \Rightarrow P_A=P_B-\gamma_{liq}h$$

Or $P_B=P_{B'} \Rightarrow P_B=P_{atm}+\Delta h\gamma_{Hg} \Rightarrow P_A=P_{atm}+\Delta h\gamma_{Hg}-\gamma_{liq}h$

Si on cherche la pression relative au point A : $P_A=\gamma_{Hg}\Delta h-\gamma_{liq}h$

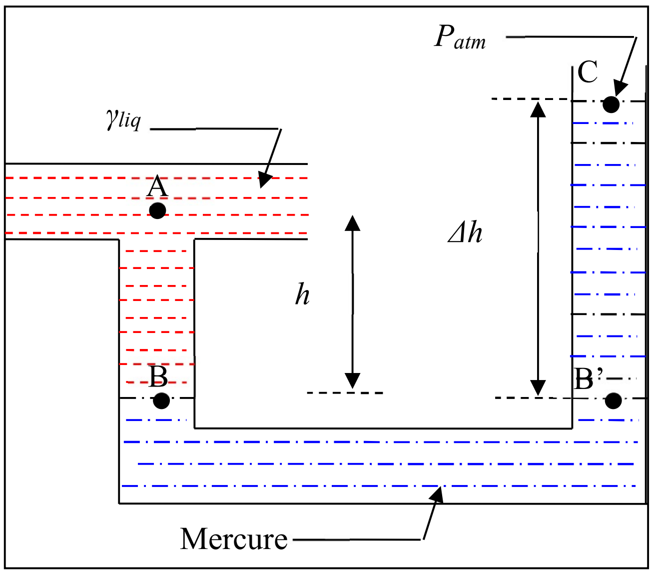
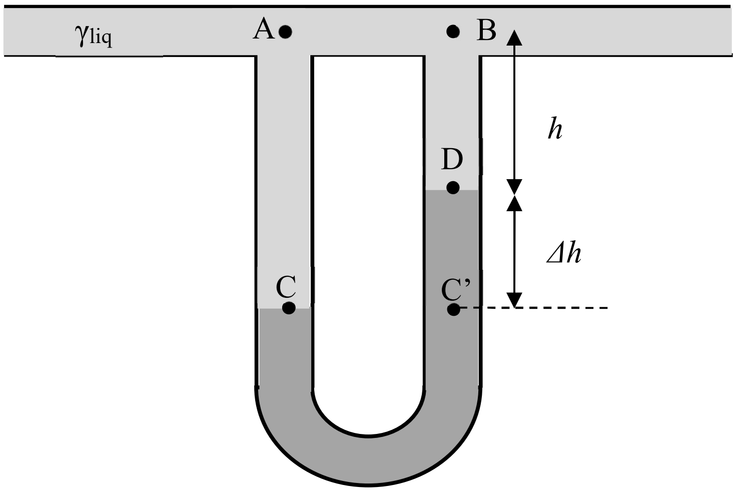


Figure II. 6 Schéma explicatif du piézomètre à liquides différents

* Evangelista Torricelli (né le 15 octobre 1608 à Faenza, en Émilie-Romagne - mort le 25 octobre 1647 à Florence

d- Manomètre différentiel

Il sert à mesurer la différence de pression entre deux points. On suppose que $P_A \neq P_B$ et on veut calculer P_A-P_B.



$P_C=P_A+\gamma_{liq}(h + \Delta h)$

$P_D=P_B+\gamma_{liq}h$

$P_C=P_{C'}=\gamma_{Hg}\Delta h$

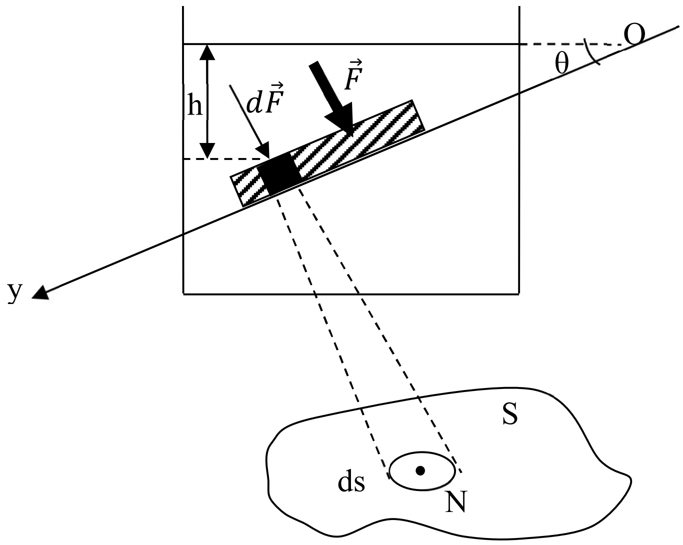
$$P_A\text{-}P_B=\Delta h(\gamma_{Hg}-\gamma_{liq})$$

Action des forces de pression sur une surface plane

Résultante des forces de pression

Utilisons l'équation fondamentale de l'hydrostatique pour déterminer la résultante des forces de pression d'un liquide sur une paroi inclinée.

O : le point d'intersection entre la surface libre et le plan de la surface plane



Sur l'élément dS agit la force élémentaire $dF = PdS$ avec $P= \gamma h \Rightarrow dF = \gamma h\ dS = \gamma \times y\ sin\theta\ dS$ d'où la résultante des forces de pression s'exerçant sur toute la surface :

$$F = \int_S \gamma y \sin \theta dS = \gamma \sin \theta \int_S y dS \Rightarrow F = \gamma S \sin \theta \frac{\int_S y dS}{S} = \gamma \sin \theta y_G S$$

On pose $h_G=y_G\,sin\theta \Rightarrow F=\gamma\ S\ h_G \Rightarrow \boldsymbol{F=S\ P_G}$

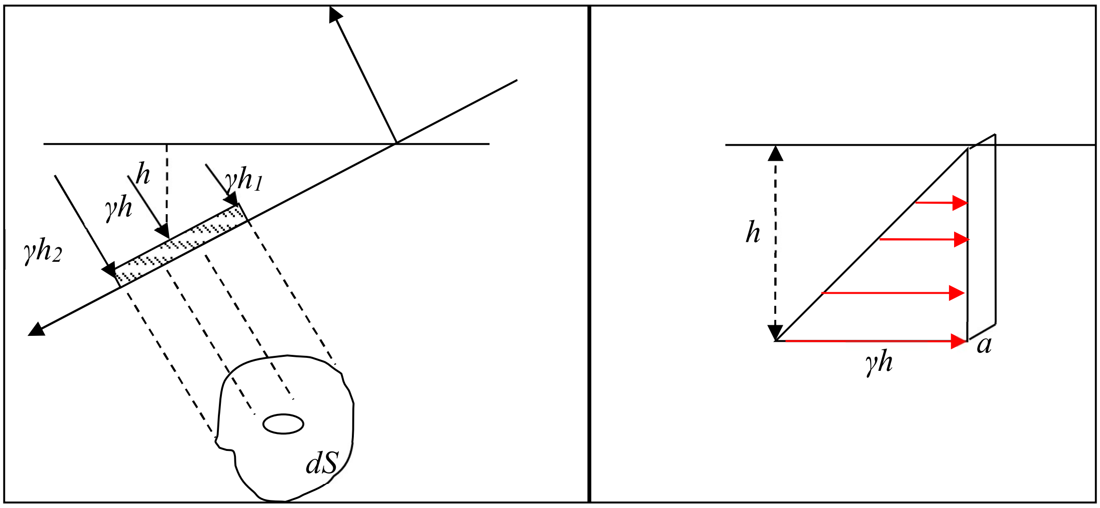
On peut dire que la moyenne des forces qui s'exerce sur la paroi plane est celle qui s'exerce au centre de gravité.

Méthode du prisme de pression

Le prisme de pression et une méthode simplifiée, basée sur l'utilisation d'un prisme de pression **fictif**, dont chaque caractéristique a une signification.

Considérons la pression $P=\gamma h$ agissant sur l'élément dS. Supposons un système élémentaire formé par une hauteur fictive = γh et une force élémentaire dS. On forme ainsi un prisme élémentaire de volume élémentaire : $dV=\gamma h dS = dF$ par intégration on aura $F=V$.

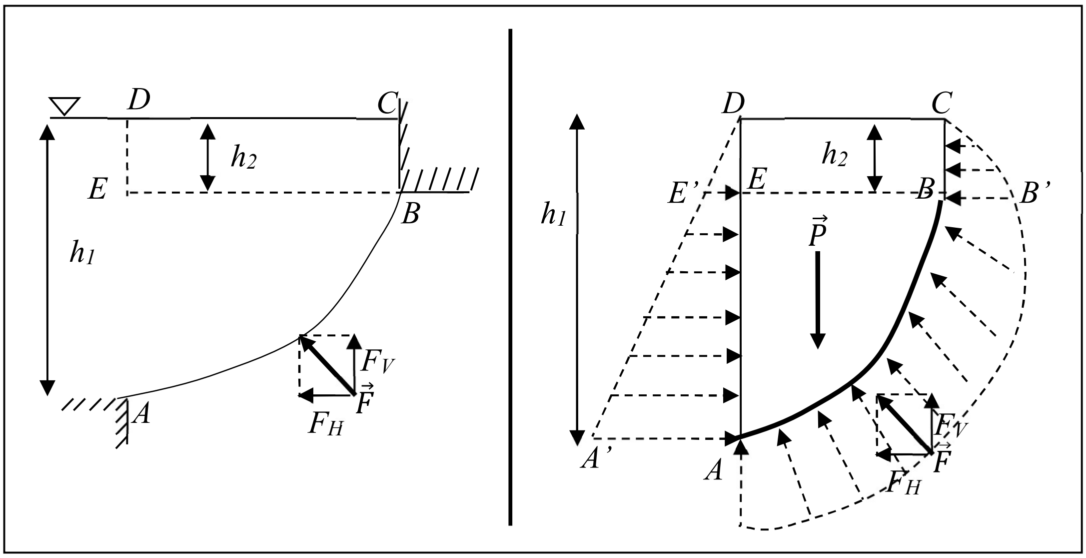
Donc on obtient la force résultante de pression F en évaluant le volume total du prisme fictif engendré par la plaque considérée : $F = V = a \times h \times \frac{\gamma\, h}{2} \Rightarrow F = \gamma\, a \frac{h_2}{2}$



Action des forces de pression sur les surfaces courbes

Exemple

Soit une vanne de courbure AB, de longueur b. On veut calculer la résultante des forces de pression exercée sur la surface courbe.



Soit F la réaction de la vanne sur le liquide : $\sum F_{horizontales} = 0$

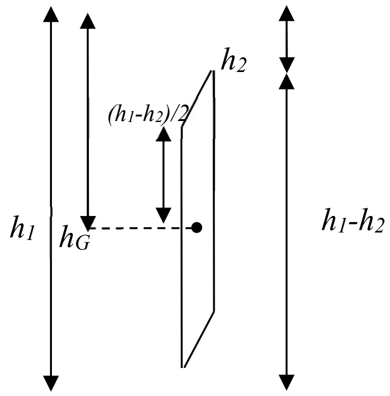
On va isoler le fluide en équilibre situé dans le domaine ABCDE.

- Le prisme de pression DEE' équilibre le prisme de pression CBB'
- Le prisme de pression E'EA'A est équilibré par la composante horizontale F_H de la réaction $F_H = V_{EE'A'A}$. $V_{EE'A'A} = V_{DAA} - V_{DEE'}$

$$V_{EE'A'A} = \frac{\gamma h_1 \times h_1}{2} \times b - \frac{\gamma h_2 \times h_2}{2} \times b$$

$$F_H = \frac{\gamma b}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right)$$

Si on projette la surface courbe sur la verticale :



$$F_x = S\gamma h_G$$

$$F_x = (h_1 - h_2) \times b \times \gamma \left(h_2 + \frac{h_1 - h_2}{2} \right)$$

$$F_x = F_H = \frac{\gamma b}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right)$$

Concernant la force verticale :

$$\sum F_{verticales} = 0 \Rightarrow F_V - P = 0 \Rightarrow F_V = \gamma V$$

Conclusion :

- *Pour une surface courbe la force horizontale est égale à la force exercée sur la projection verticale de la surface.*
- *La force verticale est égale au poids du liquide réel ou fictif située au-dessus de la surface courbe par rapport à la surface du liquide*

Application

Déterminons les réactions exercées aux points A et B de longueur L et d'un poids *P*.

1/. Réaction au point A

La réaction en point A est donnée par la composante horizontale de la force de pression F_H exercée par le liquide sur la surface courbe :

$$\Sigma F /^{ox} = 0 \Rightarrow F_H - R_A = 0 \Rightarrow F_H = R_A$$

Projection de CB sur la verticale $F_H = S\gamma h_G \Rightarrow F_H = (h_1 \times L)\ \gamma\ h_1/2$

En utilisant le prisme de pression : $F_H = V_{prisme} = \frac{\gamma h_1 h_1}{2} L$

2/. Réaction au point B

$$\Sigma F /^{oy} = 0 \Rightarrow R_B - P_{cyl} - F_{CD} + F_{BD} = 0$$

$F_{CD} = P_{CC'D} = \gamma_{liquide} \times V_{CC'D}$	$F_{DB} = P_{BCC'DB} = \gamma_{liquide} \times V_{BCC'DB}$
$F_{CD} = \gamma_{liquide} \times S_{CC'D} \times L$	$F_{DB} = \gamma_{liquide} \times V_{BCC'DB}$

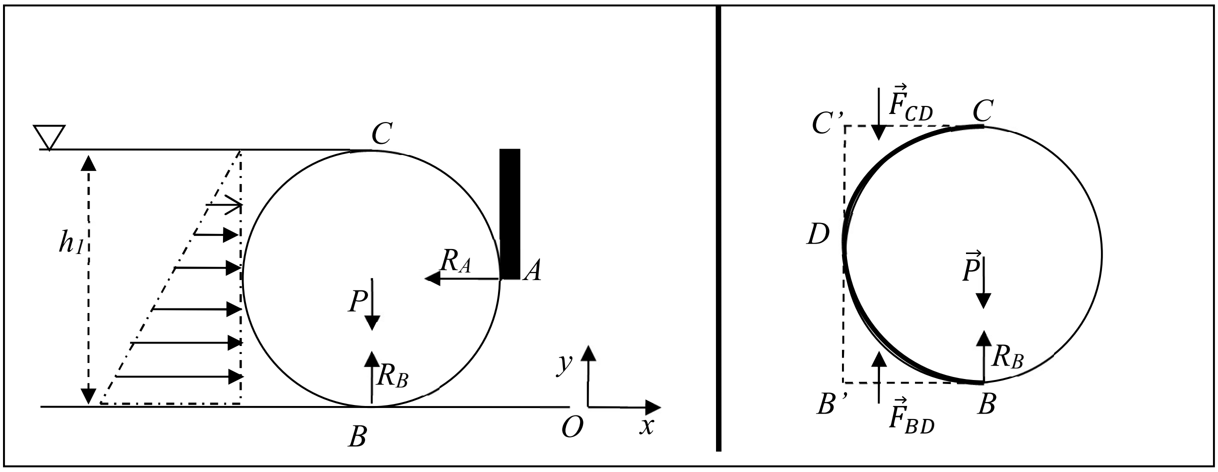
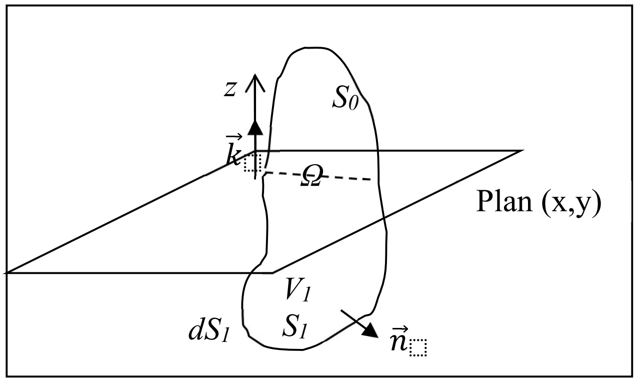


Figure II. 7 Schématisation des forces horizontale et verticale

Poussée sur les corps immergés

Etablissement du principe



Soit $z=0$ la surface libre du liquide, l'axe oz est orienté vers le haut. S1 est la surface de la partie émergée de volume V_1.

On a $d\vec{F}_p = -P\vec{n}dS$ et $P = -\rho gz + cte$

(La constante n'intervenant pas dans le calcul).

$\vec{F}_P = \int_{S_1} \rho gz\vec{n}dS = \int_{S_1+S_0} \rho gz\vec{n}dS$ puisque

$$\int_{S_0} \rho gz\vec{n}dS = 0 \text{, } z \text{ étant nul sur } S_0$$

$S_0 + S_1$ est fermée donc : $\vec{F}_P = \int_{V_1} \vec{\nabla}(\rho gz)dV = \int_{V_1} \rho g\vec{k}dV = \underbrace{\rho g V_1 \vec{k}}_{\text{Poids du volume V1 du fluide déplacé}}$

Centre de poussée :

Soit P ce point, on a : $\vec{M}_0(\vec{F}_P) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_P$

D'autre pat : $d\vec{M}_0(\vec{F}_P) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF_p} = \overrightarrow{OM} \wedge \rho gz\vec{n}dS$ soit $\vec{M}_0(\vec{F}_P) = \int_{S_0+S_1} \rho gz\overrightarrow{OM} \wedge \vec{n}dS$

$$\vec{M}_0\left(\vec{F}_P\right)=-\int_{V_1}\overrightarrow{rot}\left(\rho gz\,\overrightarrow{OM}\right)dV \text{ or } \overrightarrow{rot}\left(\rho gz\,\overrightarrow{OM}\right)=\begin{pmatrix}-\rho gx\\ \rho gy\\ 0\end{pmatrix}$$

D'autre part : $\vec{F}_P \wedge \overrightarrow{OM} = \left(\rho g V_1\right)\vec{k} \wedge \overrightarrow{OM} = -\int_{V_1}\frac{\vec{F}_P}{V_1}\wedge\overrightarrow{OM}\,dV = -\frac{\vec{F}_P}{V_1}\wedge\int_{V_1}\overrightarrow{OM}\,dV$

$$\vec{M}_0\left(\vec{F}_P\right)=-\frac{\vec{F}_p}{V_1}\wedge\overrightarrow{OG_1}V_1=\overrightarrow{OG_1}\wedge\vec{F}_P$$

Où G_1 désigne le centre de gravité de V_1.

Principe d'Archimède* (énoncé)

Un corps *Ω* ***plongé complètement ou partiellement*** dans un liquide au repos subit de la part de ce liquide une poussée verticale dirigée vars le haut, égale au poids du liquide déplacé et appliquée au centre de gravité de la partie immergée.

La poussée d'Archimède s'applique au centre de gravité du volume du corps immergé :

- Si $F_p <$ poids du corps : le corps se noie ;
- Si $F_p =$ poids du corps : le corps flotte en état d'immersion
- Si $F_p >$ poid du corps : le corps émerge.

* Archimède de Syracuse (en grec ancien : Ἀρχιμήδης / Arkhimêdês), né à Syracuse vers 287 av. J.-C. et mort en cette même ville en 212 av. J.-C., est un grand scientifique grec de Sicile (Grande-Grèce) de l'Antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur.