Chap 3 Cinématique des fluides

Pour étudier les écoulements de fluides, nous devons nous donner les moyens de décrire le mouvement des particules fluides dans ces écoulements. C'est l'objet de la cinématique qui s'attache à faire une description des écoulements sans avoir recours au calcul des forces mises en jeu.

I- Description du mouvement

I-1 Particule fluide

La particule fluide est choisie comme entité élémentaire permettant une description complète des écoulements; il s'agit d'un « paquet » de molécules entourant un point donné qui se déplace avec le fluide. La particule fluide est caractérisée du point de vue thermodynamique par sa masse volumique ρ, sa pression p et sa température T. Pour l'étude du mouvement, on introduit la position et la vitesse de la particule qui se translate, tourne sur elle-même et se déforme quand elle s'écoule. La description du fluide en mouvement peut se faire de deux points de vue :

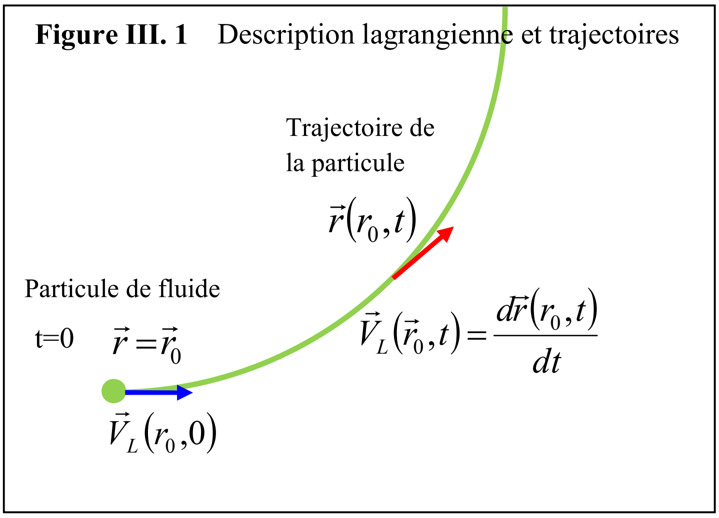
On peut choisir de **suivre les particules fluides dans leur mouvement** (**approche de Lagrange**), ou on peut faire **un cliché à un instant donné du champ de vitesse** de toutes les particules fluides (**approche d'Euler**).

I-2 Description de Lagrange[*] et trajectoires

Dans le cadre de la description lagrangienne, on suit une particule fluide dans son mouvement, issue d'un point fixé M_0 $\left(\overrightarrow{OM}_0 = \vec{r}_0\right)$ et on regarde sa position à chaque instant t.

Par exemple, la particule de fluide dont il est question précédemment, sera en $M(x, y, z)$ à l'instant t. Le mouvement est connu si on connait les coordonnées (x,y,z) en fonctions de (x_0,y_0,z_0) et du temps t :

Figure III. 1 Description lagrangienne et trajectoires



[*] Joseph Louis de Lagrange, né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome sarde naturalisé français.

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = \begin{pmatrix} V_x = \dfrac{dx}{dt} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \vec{V}(r_0, t)$$

Les variables $\boldsymbol{r_0(x_0,y_0,z_0)}$ **et** $\boldsymbol{t}$ sont appelées, les ***variables de Lagrange.***

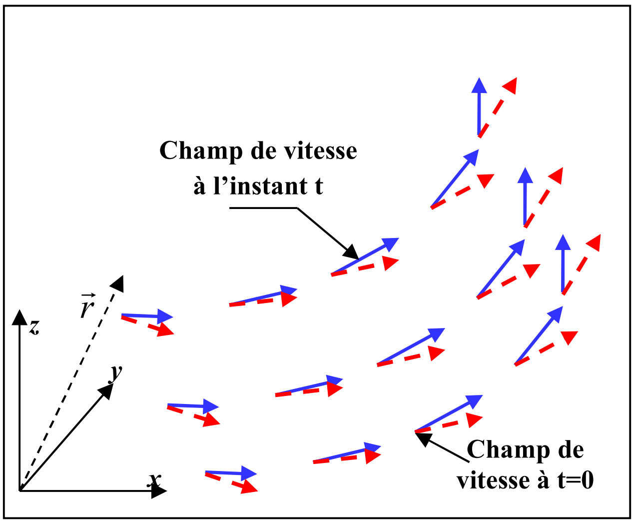
La trajectoire d'une particule de fluide est définie par le chemin suivi par cette particule au cours du temps, c'est-à-dire l'ensemble des positions successives de cette particule au cours du mouvement. On peut les visualiser en injectant un traceur (fumée, liquide colorée…).

Analytiquement, dans un repère cartésien, les trajectoires sont définies par les coordonnées x,y,z de la particule en fonction du temps et des conditions initiales à l'instant t_0, soit :

$$\begin{pmatrix} V_x = \dfrac{dx}{dt} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} \Rightarrow dt = \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$$

La trajectoire de la particule se situant en M_0 à l'instant $t = 0$ est solution de l'équation différentielle ci-dessus. En ingérant ce système avec les conditions initiales on obtient la position à chaque instant : $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{V}(r_0, t)\, dt$

I-3Description d'Euler* et lignes de courant



Dans l'approche eulérienne, au lieu de suivre les particules fluides dans leur mouvement, on se place en un **point fixe** du référentiel d'étude et on **détermine la vitesse** de la particule à un instant t donné.

On connaît l'écoulement lorsque l'on connaît le champ des vitesses $\vec{V}(r,t)$

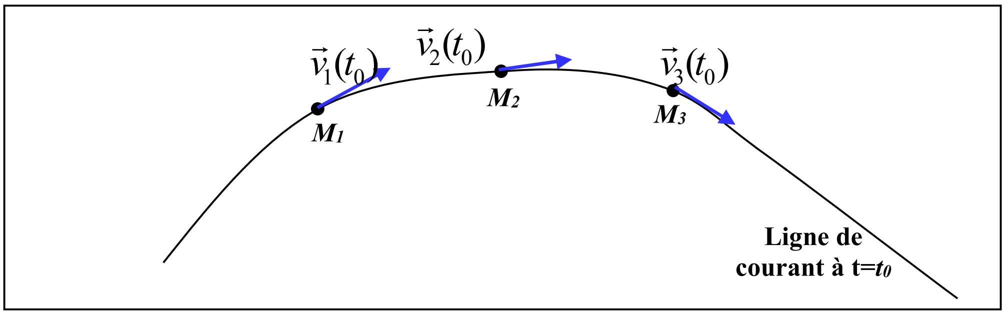
* Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort à 76 ans le 7 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse

$$\vec{V}(M,t)=\vec{V}(x,y,z,t)=\begin{pmatrix} V_x = V_x(x,y,z,t) \\ V_y = V_y(x,y,z,t) \\ V_y = V_y(x,y,z,t) \end{pmatrix}$$

En mécanique des fluides, on ne s'intéresse généralement pas à la trajectoire individuelle des particules. Ce qui intéresse, c'est de savoir comment varie la vitesse en tout point de l'écoulement à tout instant, c'est pour cette raison que la description eulérienne est la plus utilisée.

Une ligne de courant est définie comme la courbe qui en chacun de ses points est tangente au vecteur vitesse à l'instant t.

L'ensemble des lignes de courant peut évoluer au cours du temps.



Expression de la ligne de courant :

Soit $\overrightarrow{dM}=(dx,dy,dz)$ un élément d'une ligne de courant, on a $\overrightarrow{dM}\,//\,\vec{V}(M,t)\Rightarrow\overrightarrow{dM}\wedge\vec{V}=\vec{0}$

$$\vec{V}(M,t)=\vec{V}(x,y,z,t)=\begin{pmatrix} V_x = V_x(x,y,z,t) \\ V_y = V_y(x,y,z,t) \\ V_y = V_y(x,y,z,t) \end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{dM}\wedge\vec{V}=\begin{pmatrix} dyV_z - dzV_y \\ dzV_x - dxV_z \\ dxV_y - dyV_x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation de la ligne de courant s'obtient en résolvant les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{V_x(x,y,z,t)}=\frac{dy}{V_y(x,y,z,t)}=\frac{dz}{V_z(x,y,z,t)}$$

Il faut souligner que :

- Une trajectoire est propre à une particule, elle est donc indépendante du temps (seule la position de la particule sur sa trajectoire dépend du temps).
- Une ligne de courant est donc variable dans le temps, puisque c'est le cas des vecteurs vitesses sur lesquels elle « s'appuie »
- Il n'y a aucune raison pour que trajectoire et ligne de courant puissent s'identifier.

Ce n'est vrai que dans le cas **d'un écoulement stationnaire** (les champs eulériens sont tous indépendants du temps).

Tube de courant

Un tube de courant est une surface composée de lignes de courant et qui s'appuie sur un contour fermé.

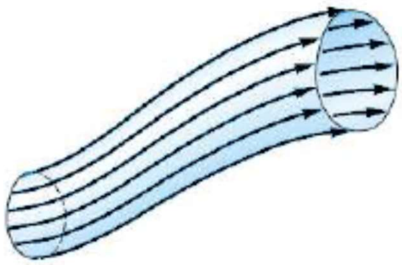


Figure III. 2 Exemple d'un tube de courant

II-Dérivée particulaire

II-1 Cas d'un scalaire

Considérons une grandeur physique locale *G(M,t)* attachée à une particule de fluide située en *M* à l'instant *t*. On peut penser à la température, la pression, la densité…etc. Cherchons à calculer le taux de variation de cette grandeur lorsque l'on suit la particule. On appelle cette grandeur la dérivée particulaire et on la note $\frac{dG}{dt}$

$$\frac{dG}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{G(x+dx, y+dy, z+dz) - G(x,y,z)}{dt}$$ sachant que $V_x = \frac{dx}{dt}; V_y = \frac{dy}{dt}; V_z = \frac{dz}{dt}$

Donc :
$$\frac{dG}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{G(x+V_x dt, y+V_z dt, z+V_z dt) - G(x,y,z)}{dt}$$

En développant au 1er ordre le 1er terme, l'expression devient :

$$\frac{dG}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{G(x,y,z) + V_x \frac{\partial G}{\partial x} dt + V_y \frac{\partial G}{\partial y} dt + V_z \frac{\partial G}{\partial z} dt + \frac{\partial G}{\partial t} dt - G(x,y,z)}{dt}$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + V_x \frac{\partial G}{\partial x} + V_z \frac{\partial G}{\partial y} + V_z \frac{\partial G}{\partial z} = \left(\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}\right) G$$ ou bien $$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right) G$$

II-2 Cas d'une grandeur vectorielle 'Accélération comme exemple'

Calculons l'accélération d'une particule de fluide à partir du champ de vitesse eulérien $\vec{v}(M,t)$. L'accélération est le taux de variation du champ de vitesse en suivant une particule de fluide. On a donc :

$$\vec{a}(M,t) = \frac{dv_x}{dt}\vec{v}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{v}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{v}_z$$

Ce qui donne :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_x$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_y$$
$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_z$$

$$\boxed{\vec{a}(M,t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}$$

Le premier terme est lié au caractère non permanent de l'écoulement alors que le second au fait que la particule, en se déplaçant, visite des endroits où la vitesse change. On l'appelle le terme convectif.

On montre aussi que l'accélération peut prendre la forme : $\boxed{\vec{a}(M,t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 + \overrightarrow{rot}\ \vec{v}\wedge\vec{v}}$

III- Conservation de la masse

III-1 Equation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de **conservation de la masse**: dans le mouvement d'un fluide s'écoulant à la vitesse *v*, s'il n'y-a ni accumulation de matière (pas de condensation, évaporation….), ni apparition de matière (pas de tuyau raccordé…), la matière se conserve : $m = cst$. Formulons mathématiquement cette loi :

$$m = cte \Leftrightarrow \frac{dm}{dt} = 0$$

$m = \iiint_{\vartheta} \rho d\vartheta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\iiint_{\vartheta} \rho d\vartheta\right) = 0$ donc (voir séance de cours) :

$$\boxed{\iiint_{\vartheta}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\right)d\vartheta = 0}$$

C'est **l'expression intégrale** du principe de conservation de la masse.

En générale toute variable $G = \iiint_{\vartheta} \rho g d\vartheta$ on a $\frac{dG}{dt} = \iiint_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial t}(\rho g) + \nabla(\rho g\cdot\vec{v})d\vartheta$

Puisque cette équation reste valable $\forall\,\vartheta$ l'expression peut prendre la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

C'est **l'expression locale** du principe de conservation de la masse.

III-2 Cas particuliers

Ecoulement permanent

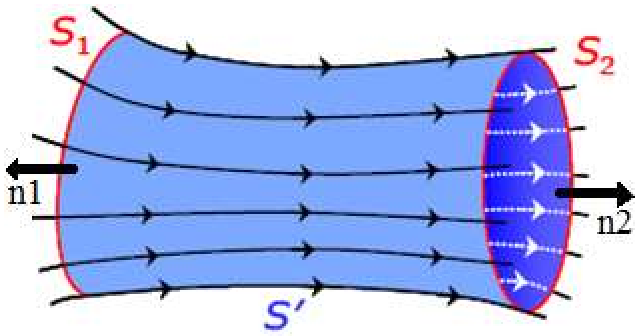
Dans ce cas, il n'y a pas de variation explicite avec le temps $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$: d'où $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

Ecoulement incompressible

Un écoulement est incompressible si le volume de toute particule de fluide reste constant au cours de son mouvement. Les particules de fluide ayant une masse constante par construction, leur masse volumique est donc constante au cours de leur écoulement.

ρ = cte lorsque l'on suit une particule dans son mouvement $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = div(\vec{v}) = 0$.

III-3 Cas du tube de courant



On se place dans le cas d'un écoulement permanent, l'équation intégrale de l'équation de continuité prend la forme : $\iiint_{\vartheta} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \, d\vartheta = 0$. En utilisant le théorème de Green[*]-Ostrogradski[**] (ou de flux-divergence) : $\iiint_{\vartheta} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \, d\vartheta = \iint_S (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS$.

Le tube de courant est infiniment mince de sorte que ρ_1 et v_1 sont constantes sur S_1 de même pour S_2 :

$$\iint_S (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_2} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S'} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS$$

- Sur S_1 : $\rho = \rho_1$, $\vec{v} = \vec{v}_1$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -v_1 \Rightarrow \iint_{S_1} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS = -\rho_1 v_1$;
- Sur S_2 : $\rho = \rho_2$, $\vec{v} = \vec{v}_2$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = v_2 \Rightarrow \iint_{S_2} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS = \rho_2 v_2$;
- Sur SL, $\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v}' \cdot \vec{n}' = 0 \Rightarrow \iint_{S'} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS = 0$.

Donc : $\boldsymbol{\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2}$.

[*] George Green (juillet 1793 - 31 mai 1841) est un physicien britannique. Il est l'auteur d'un Essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme paru en 1828.
[**] Mikhaïl Vassilievitch Ostrogradsky est un physicien et mathématicien russe d'origine ukrainienne, né le 24 septembre 1801 à Pachenna (dans l'actuel oblast de Poltava) et mort le 1er janvier 1862 à Poltava

Cette relation exprime la conservation du débit massique. Si le fluide est incompressible $\rho_1=\rho_2 \Rightarrow$ $\boldsymbol{v_1 S_1 = v_2 S_2}$ qui exprime la conservation du débit volumique.

IV- Étude locale du champ de vitess:rotation et déformation

$d\mathcal{V}$ est un élément de volume entourant un point O de vitesse $\vec{V}_0\left(u_0, v_0, w_0\right)$. Soit $M(x,y,z)$ un point au voisinage de O. on suppose que ce voisinage est suffisamment petit pour négliger les dérivées secondes, les produits des dérivées secondes et les produits des dérivées premières de u, v et w, composantes de la vitesse $\vec{V}$ en M. Alors à l'aide de la formule des accroissements finis, on a :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} \\ v &= v_0 + x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial z} \\ w &= w_0 + x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice précédente peut se mettre sous la forme d'une somme d'une matrice antisymétrique $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ et une matrice symétrique $\overline{\overline{S}}$.

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{\mathrm{S}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$\vec{V}$ s'écrira alors sous la forme : $\vec{V} = \vec{V}_0 + \overline{\overline{\mathrm{A}}} \cdot \overrightarrow{OM} + \overline{\overline{S}} \cdot \overrightarrow{OM}$

En développant $\overline{\overline{\mathrm{A}}} \cdot \overrightarrow{OM}$, on s'aperçoit que $\overline{\overline{\mathrm{A}}} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{rot}\, \vec{V}\right) \wedge \overrightarrow{OM}$

En posant $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{rot}\, \vec{V}\right)$ on aboutit à : $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} + \overline{\overline{S}} \cdot \overrightarrow{OM}$ avec :

- $\vec{V}_0$ est la vitesse de translation de la particule M ;
- $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation, ou vecteur taux de rotation ou le tourbillon ;
- $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ est la vitesse de rotation de la particule M ;
- $\overline{\overline{S}}$ est le tenseur des taux de déformation ou tout simplement tenseur de déformation ;
- $\overline{\overline{S}} \cdot \overrightarrow{OM}$ est la vitesse de déformation de la particule M ;
- $\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ caractérise un déplacement solide.

Le mouvement d'une particule fluide est donc la composition d'un déplacement solide (translation en bloc ou rotation en bloc) et d'une déformation de la particule.

La ligne tourbillon est une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur tourbillon.

Si $\vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{i} + \Omega_2 \vec{j} + \Omega_3 \vec{k}$ les lignes de courant sont alors solution de : $\dfrac{dx}{\Omega_1} = \dfrac{dy}{\Omega_2} = \dfrac{dz}{\Omega_3}$.

Si S est une surface fermée entourant un volume ϑ . Et puisque la divergence d'un rotationnel est nulle on en déduit alors que : $\iint_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_\vartheta \vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}\, d\vartheta = 0$.

Le flux du tourbillon à travers une surface fermée est nul.

On appelle ***tube tourbillon*** l'ensemble des lignes tourbillons s'appuyant sur une courbe fermée.

Soit un tube tourbillon (T) fermé par deux surfaces (S_1) et (S_2)

On a $\int_{S_1+S_2+T} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = 0$ donc $\int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS + \int_T \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = 0$

Or sur (T) $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} = 0$ donc : $-\int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS$

En posant $\vec{n'} = -\vec{n}$ l'égalité prendra la forme

$$\int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n'} dS = \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \Gamma$$

La quantité 2Γ est dite : intensité du tourbillon.