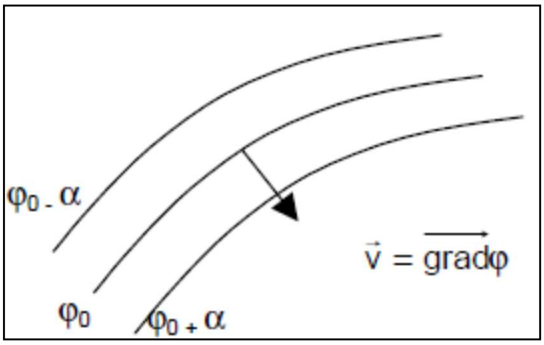
Chap 4 Théorie du fluide parfait

I- Ecoulement irrotationnel ou à potentiel des vitesses

Les mouvements qui s'effectuent sans rotation sont appelés écoulements irrotationnels. Ils jouent un rôle théorique important et permettent une bonne approximation de nombreux écoulements réels. La propriété distinctive de cette classe d'écoulements s'écrit naturellement:

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{v}(M,t)\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}\,(M,t) = \vec{0} \qquad \forall M, \forall t$$

Il s'agit d'une condition locale qui exprime que le déplacement de toute particule fluide a lieu sans rotation de celle-ci sur elle-même.



La condition d'irrotationnalité du vecteur vitesse assure l'existence d'une fonction de champ scalaire *φ (M,t)* telle que, à chaque instant *t* et en tout point *M* du champ, on ait : $\vec{v}\,(M,t) = \overrightarrow{grad}\varphi(M,t)$

Le champ de vitesse dérive d'un potentiel et l'analyse de l'écoulement peut être effectuée à l'aide de la seule fonction φ. La fonction φ est appelée ***fonction potentiel des vitesses*** et l'écoulement est dit ***écoulement potentiel***. Par définition donc, $\vec{v}$ est un vecteur normal aux surfaces $\varphi =$ cte dirigé vers les potentiels croissants.

La circulation du vecteur vitesse est indépendante du chemin suivi (car $d\varphi$ est une différentielle totale exacte [à établir par l'étudiant]):

$$\Gamma = \int_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_C \vec{\nabla}\varphi \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Si le mouvement est incompressible, et irrotationnel, alors : $div\,\vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\varphi\right) = 0$.

Ou bien : $\nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$ (en coordonnées cartésiennes).

La fonction « potentiel » satisfait l'équation de Laplace, on dit que c'est une fonction harmonique.

L'étude d'écoulements irrotationnels conservatifs et incompressibles se ramène alors à l'étude de fonctions harmoniques, respectant certaines conditions initiales et aux limites.

II-Fonction de courant

II-1 Définition

On considère un écoulement d'un fluide incompressible, l'équation de continuité s'écrit alors : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Or on sait que $div\left(\overrightarrow{rot}\,(\vec{A})\right) = \vec{0}$ est toujours vrai. On peut ainsi définir un vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$.

$\vec{A}$ correspond à un potentiel vecteur : $\vec{v} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \begin{cases} u = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ v = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ w = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases}$

Si l'on se place dans le cas d'un écoulement dans le plan (xOy) et donc invariant par translation suivant z, $w = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial z} = 0$ d'où $\vec{v} = \begin{cases} u = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial A_z}{\partial x} \end{cases}$

Donc, dans le plan (xOy), la vitesse est en tout point définie au moyen de la seule grandeur scalaire (x, y). On peut alors poser : $A_z\,(x, y)$ **= $\psi(x, y)$ *fonction de courant***

Et $\vec{v} = \begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$ constitue ce qu'on appellera le champ des vitesses.

En coordonnées polaire $\vec{v} = \begin{cases} v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$

II-2 Propriétés de la fonction de courant

L'équation de continuité pour les écoulements plans et conservatifs d'un fluide incompressible permet d'établir que : $div\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$ par conséquent : $d\psi =$

$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy$ est une différentielle totale exacte et $\int_A^B d\psi$ ne dépend du chemin suivi, mais seulement des états initiale et finale : $\int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A$.

Le long d'une courbe $\psi(x,y)=C^{te}$ on a :

$$d\psi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0 \Leftrightarrow -vdx + udy = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

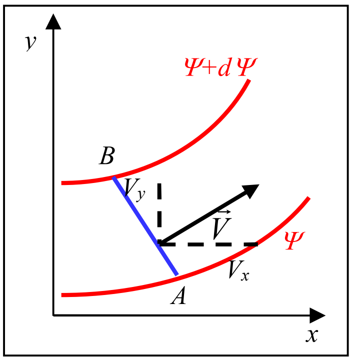
C'est l'équation d'une ligne de courant. La fonction de courant est donc constante le long d'une ligne de courant. A chaque ligne de courant est associée une constante différente.

A noter que la fonction de courant est une fonction harmonique dans le cas d'écoulement irrotationnel :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = 0$$

II-3 Débits entre deux lignes de courant

On considère dans un écoulement plan, deux lignes de courant infiniment voisines, caractérisées par des fonctions de courant constantes infiniment proches :



Le débit volumique entre deux point M et N par unité de profondeur est (voir cours):

$$dq_v = udy - vdx = \frac{\partial\psi}{dx}dx + \frac{\partial\psi}{dy}dy = d\psi$$

Par conséquent, entre 2 lignes de courant quelconques, de constantes ψ_A· et ψ_B, le débit volumique est donné par : $q_v = \int_A^B dq_v = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A$.

L'intérêt indéniable de cette formulation, bien que limitée de prime abord aux fluides incompressibles et non visqueux, est de ramener le problème à une équation différentielle ordinaire avec une seule variable inconnue et non plus deux.

III- Equipotentielles et lignes de courant

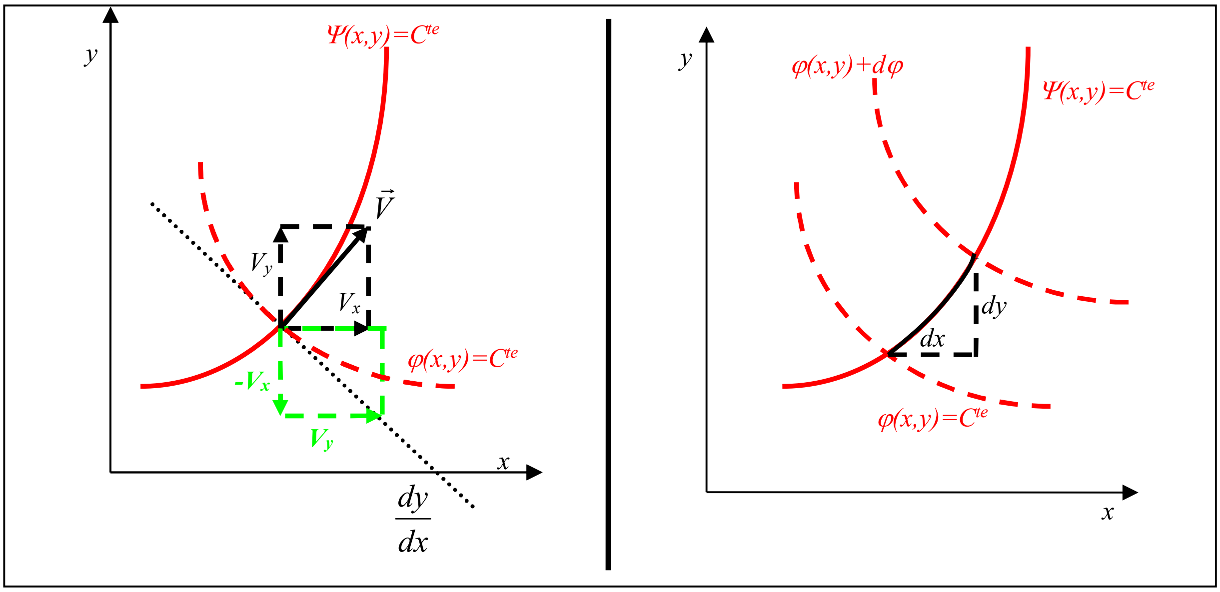
Ligne équipotentielle :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow udx + vdy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}$$

Ligne de courant :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow -vdx + udy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u}{v}$$

Les équipotentielles sont donc partout *orthogonales* aux lignes de courant.



$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = udx + vdy = \left(u + \frac{v^2}{u}\right)dx = \left(\frac{u^2}{v} + v\right)dy$$

$$d\varphi = \left(\frac{u^2 + v^2}{u}\right)dx = \left(\frac{u^2 + v^2}{v}\right)dy$$

On a donc $dx = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right)d\varphi$ et $dy = \left(\frac{v}{u^2 + v^2}\right)d\varphi$

Alors $ds_{\psi = C^{te}} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{\left(u^2 + v^2\right)^2}d\varphi^2} = \frac{d\varphi}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{d\varphi}{V}$

La distance entre deux équipotentielles est inversement proportionnelle à la vitesse locale de l'écoulement.

De la même manière, on peut montrer que la longueur d'un élément d'arc le long d'une équipotentielle entre deux lignes de courants est donné par : $ds_{\varphi = C^{te}} = \frac{d\psi}{V}$

IV- Potentiel complexe

IV-1 Condition de Cauchy[*] Riemann[**]

Théorème : si $f:\Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 \in \Omega$ et $f=P+iQ$ avec $P=\Re e\, f$, $Q=\Im m\, f$ alors :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Notons que par les formules de Cauchy-Riemann, nous avons plusieurs expressions équivalentes pour la dérivée d'une fonction holomorphe :

$$f'(z)=\frac{df}{dz}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}-i\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

En se ramenant au cas d'étude des écoulement parfaits incompressible et irootationnels, on a :

$$u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Résultats : φ et ψ satisfont la condition de Cauchy-Riemann

IV-2 Potentiel complexe des vitesses

Soiy z la variable complexe définie par $z=x+iy=re^{i\theta}$. On appelle **le potentiel complexe** la fonction complexe $f(z)$ définie par : $\boldsymbol{f(z)=\varphi+i\psi}$

Cette relation n'est définie qu'aux deux conditions suivantes :

- φ et ψ obéissent à la condition de Cauchy-Riemann ;
- $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ est finie (définition d'une fonction analytique)

$$\frac{dW(z)}{dz}=u-iv$$ s'appelle la vitesse complexe

L'intérêt de l'utilisation du potentiel complexe des vitesses est double :

- il réunit en une seule fonction les deux fonctions descriptives de l'écoulement ;
- il permet la construction d'écoulements évolués par simple superposition d'écoulements élémentaires ;

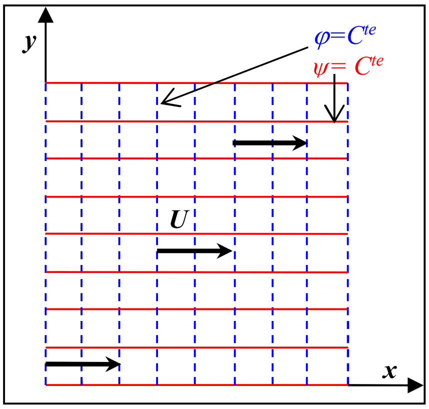
---

[*] Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.

[**] Georg Friedrich Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, mort le 20 juillet 1866 en Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à la topologie, l'analyse, la géométrie différentielle et le calcul, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale

V-Exemples d'écoulements plans

V-1 Ecoulement uniforme



Considérons l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses : $f(z)=Uz$ où U est une C^{te} réelle

On a alors : $\varphi(x,y)+i\psi(x,y) = Ux+iUy$

Par identification on obtient : $\varphi(x,y)=Ux$ et $\psi(x,y)=Uy$

Les lignes de courant sont telles que : $\psi(x,y)=Uy=C^{te}$

$\Rightarrow y=Cte \;\; \forall x$: ce sont des droites horizontales

Les équipotentielles sont telles que : $\varphi(x,y)=Ux=C^{te}$

$\Rightarrow x=Cte \;\; \forall y$: ce sont des droites verticales

Détermination du champ de vitesse : $\vec{v} = \begin{cases} v_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = U \\ v_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \end{cases}$

La vitesse est uniforme : $\vec{v}=U\vec{e}_x$

V-2 Ecoulement autour d'une source ou d'un puits

On considère l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe : $f(z)=Cln(z)$ où $z=x+iy=re^{i\theta}$ et C est une constante réelle.

$$f(z)=Cln(re^{i\theta})=C(ln(r)+i\theta)$$

On peut alors en déduire la fonction de courant et le potentiel des vitesses :

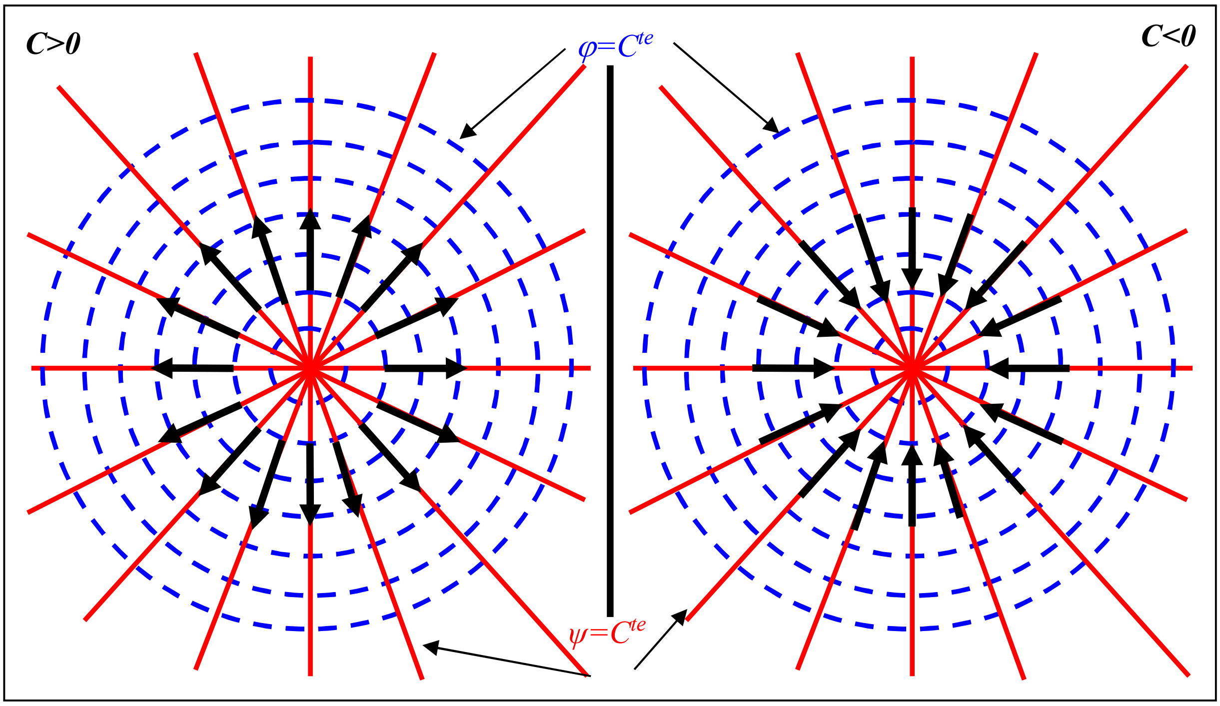
- $\varphi(r,\theta) = C\,ln(r)$
- $\psi(r,\theta) = C\theta$

Les lignes de courant sont telles que : $\psi(r,\theta)=C\theta=C^{te} \Rightarrow \theta = C^{te} \;\; \forall r$ il s'agit alors de droites passant par l'origine.

Les équipotentielles sont telles que : $\varphi(r,\theta)=C\,ln(r)=C^{te} \Rightarrow r= C^{te} \;\; \forall \theta$ il s'agit alors des cercles centrés à l'origine.

Détermination des champs de vitesse :

$$\vec{v}=\begin{cases} v_r=\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\theta} \\ v_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\dfrac{\partial\Psi}{\partial r}\end{cases} \text{ soit } \boxed{\vec{v}=\begin{cases} v_r=C/r \\ v_\theta=0\end{cases}} \Rightarrow \vec{v}=\frac{C}{r}\vec{e}_r$$



Il s'agit donc d'un écoulement radial centré sur l'origine, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine.

- Si $C > 0$, l'écoulement est divergent et correspond à l'effet d'une source à l'origine.
- Si $C < 0$, l'écoulement est convergent et correspond à l'effet d'un puits à l'origine.

La signification physique de la constante C est en rapport avec le débit généré par la source ou le puits. Calculons le débit volumique de cet écoulement radial (source ou puits) à travers un cylindre d'axe Oz (perpendiculaire au plan de l'écoulement), de rayon r et de hauteur $\Delta z=1$.

$q_v=\oint\!\!\oint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS=\oint_l \vec{V}\cdot\vec{n}\,\Delta z dl$. Il reste alors à intégrer sur un cercle de rayon r quelconque, centré à l'origine.

$$q_v=\Delta z\oint_l \vec{V}\cdot\vec{n}\,r d\theta=\Delta z\, r\int_0^{2\pi}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\theta \text{ où } \begin{cases}\vec{V}=\dfrac{C}{r}\vec{e}_r \\ \vec{n}\;=\vec{e}_r\end{cases}$$

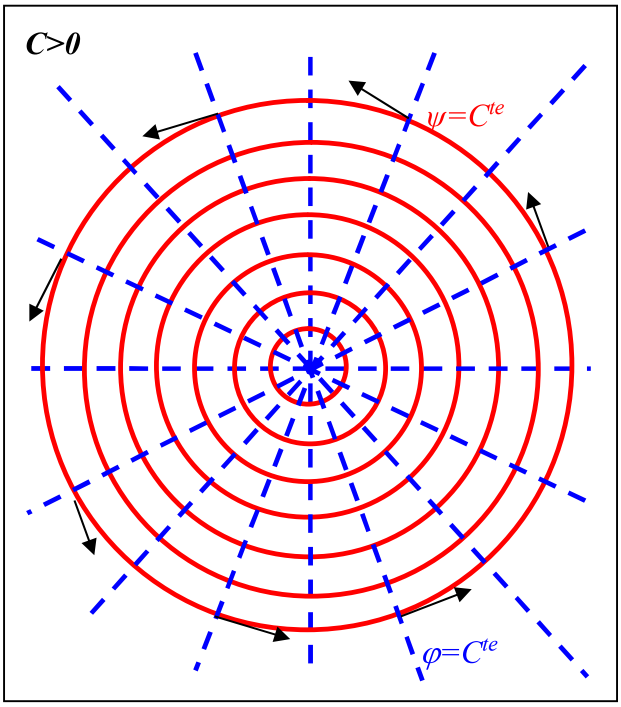
$$q_v=\Delta z\, r\int_0^{2\pi}\frac{C}{r}d\theta=2\pi\, C\Delta z \Rightarrow C=\frac{q_v}{2\pi}$$

Le potentiel complexe des vitesses d'un écoulement généré par une source ($q_v > 0$) ou un puits ($q_v < 0$) est donné par : $f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln z$.

Remarque : dans le cas d'un écoulement centré en un point z_0 quelconque du plan :

$$f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

V-3 Vortex ou tourbillon libre



On considère l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe : $f(z)=-iC\ln(z)$ où $z=x+iy=re^{i\theta}$ et C est une constante réelle.

$f(z)=-C\ln(re^{i\theta})=C(\theta- i\ln(r))$

On peut alors en déduire :

- $\varphi(r,\theta) = C\theta$
- $\psi(r,\theta) = -C\ln(r)$

Les lignes de courant sont telles que : $\psi(r,\theta)= C\ln(r)=C^{te} \Rightarrow r= C^{te}$ $\forall\,\theta$ il s'agit alors des cercles centrés à l'origine.

Les équipotentielles sont telles que :

$\varphi(r,\theta)= C\theta=C^{te} \Rightarrow \theta = C^{te}$ $\forall\, r$ il s'agit alors de droites passant par l'origine.

Détermination des champs de vitesse :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \text{ soit } \boxed{\vec{v} = \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = C/r \end{cases}} \Rightarrow \vec{v} = \frac{C}{r}\vec{e}_\theta$$

Il s'agit donc d'un écoulement ortho-radiale, tournant autour de l'origine, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine.

Si $C>0$, alors l'écoulement s'effectue autour de l'origine dans le sens trigonométrique.

Si $C<0$, alors l'écoulement s'effectue autour de l'origine dans le sens horaire.

La signification physique de la constante C est en rapport avec l'intensité du tourbillon, c'est à-dire avec la circulation du vecteur vitesse autour de l'origine du vortex.

En effet, Calculons la "circulation" de la vitesse autour de l'origine : $\Gamma = \oint_l \vec{V} \cdot \vec{dl}$ où $\vec{dl}$ parcourt une ligne de courant quelconque, i.e. un cercle de rayon r.

Avec $\vec{V} = \frac{C}{r}\vec{e}_\theta$ et $\vec{dl} = rd\theta\vec{e}_\theta \Rightarrow \Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} d\theta = 2\pi C$ donc $\boxed{C = \frac{\Gamma}{2\pi}}$

Et par conséquent $f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z)$ où Γ est la circulation (tourbillon libre)

Si $\Gamma > 0$, le vortex tourne dans le sens trigonométrique.

Si $\Gamma < 0$, le vortex tourne dans le sens horaire.

Dans le cas où le vortex tourne autour d'un point z0 quelconque du plan :

$$f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z - z_0)$$

VI- Superposition de potentiels complexes élémentaires

On considère deux écoulements, chacun décrit par un potentiel complexe des vitesses :

$$f_1(z) = \varphi_1(x,y)+i\psi_1\,(x,y) \text{ où } \Delta\psi_1=0 \text{ et } \Delta\varphi_1=0$$

$$f_2(z) = \varphi_2(x,y)+i\psi_2\,(x,y) \text{ où } \Delta\psi_2=0 \text{ et } \Delta\varphi_2=0$$

Comme l'équation de Laplace est linéaire, alors, pour toutes constantes α et β :

$$\Delta(\alpha\varphi_1(x,y)+\beta\varphi_2(x,y)) = \alpha\Delta\varphi_1(x,y)+\beta\Delta\varphi_2(x,y) = 0$$

$$\Delta(\alpha\psi_1(x,y)+\beta\psi_2(x,y)) = \alpha\Delta\psi_1(x,y)+\beta\Delta\psi_2(x,y) = 0$$

Si on pose $\varphi(x,y) = \alpha\varphi_1(x,y)+\beta\varphi_2(x,y)$ et $\psi(x,y) = \alpha\psi_1(x,y)+\beta\psi_2(x,y)$, alors φ et ψ sont harmoniques et obéissent à la condition de Cauchy-Riemann. Donc on peut définir une fonction analytique : $f(z) = \varphi(x,y)+i\psi(x,y)= \alpha f_1(z)+\beta f_2(z)$

$f(z)$ décrit l'écoulement résultant de la superposition des deux écoulements f_1 et f_2. On peut donc créer des écoulements plus évolués par simple addition des potentiels complexes d'écoulement élémentaires.

VI-1 Doublet et dipôle

On considère la superposition d'une source de débit $+q$, située en $x=a,\ y=0$, et d'un puits de débit $-q$, situé en $x=-a,\ y=0$.

On parle de l'écoulement généré par un doublet, dont le potentiel complexe des vitesses est :

$$f(z) = +\frac{q}{2\pi}\ln(z-a) - \frac{q}{2\pi}\ln(z+a)$$

Posons $z_1=z-a=r_1e^{i\theta_1}$ et $z_2=z+a=r_2e^{i\theta_2}$ d'où :

$$\boxed{f(z)=\frac{q}{2\pi}(\ln z_1-\ln z_2)=\frac{q}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1}{r_2}+i(\theta_1-\theta_2)\right)=\varphi+i\psi} \Rightarrow \begin{cases}\varphi=\dfrac{q}{2\pi}\ln\dfrac{r_1}{r_2}\\ \psi=\dfrac{q}{2\pi}(\theta_1-\theta_2)\end{cases}$$

Et donc, les lignes de courant sont telles que :

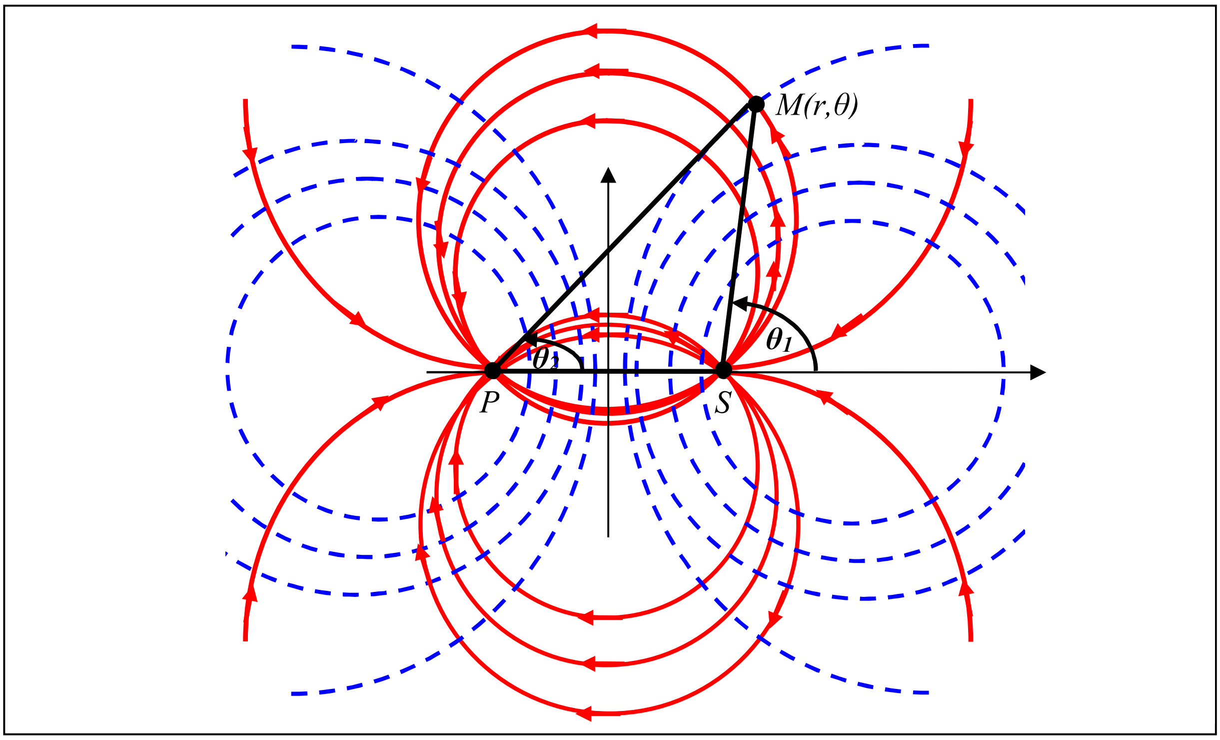
$$\frac{q}{2\pi}(\theta_1-\theta_2)=C^{te} \Rightarrow \theta_1-\theta_2=C^{te}$$

Ce sont des cercles passant tous par les origines de la source S et du puits P. L'écoulement diverge depuis la source et converge vers le puits.

Equipotentielles : $\varphi=C^{te} \Rightarrow \dfrac{r_1}{r_2}=C^{te}$

Posons $\dfrac{r_1}{r_2}=k \Rightarrow \dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k \Rightarrow \left(x+\dfrac{k^2+1}{k^2-1}a\right)^2+\left(\dfrac{2k}{k^2-1}\right)^2$

Equations de cercles orthogonaux aux lignes de courant, centrés sur l'axe des x.



Si on fait tendre a vers 0, on superpose le puits et la source à l'origine. On crée un dipôle.

$$f(z)=+\frac{q}{2\pi}\ln(z-a)-\frac{q}{2\pi}\ln(z+a)=\frac{q}{2\pi}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)=\frac{q}{2\pi}\ln\left(\frac{1-a/z}{1+a/z}\right)$$

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{z}}\right)=1-\frac{a}{z} \text{ et } \lim_{a\to 0} \ln(1-a/z)=a/z$$

Donc $f(z)\approx\frac{q}{2\pi}\ln\left(1-\frac{a}{z}\right)^2=\frac{q}{2\pi}2\ln\left(1-\frac{a}{z}\right)\approx\frac{q}{2\pi}2\left(-\frac{a}{z}\right)=-\frac{1}{2\pi}\frac{2aq}{z}$

En introduisant le moment dipolaire *p=2aq* : $-\frac{1}{2\pi}\frac{2p}{z}$

p est une constante qui peut être considérée complexe, et permettra ainsi d'orienter le dipôle dans le plan de l'écoulement.

Etudions le cas où le moment dipolaire est un réel positif :

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi}\frac{2p}{z}=-\frac{1}{2\pi}\frac{2p}{re^{i\theta}}=-\frac{1}{2\pi}\frac{2p}{r}e^{-i\theta}=-\frac{1}{2\pi}\frac{2p}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)=\varphi+i\psi$$

D'où
$$\begin{cases}\varphi=-\frac{1}{2\pi}\frac{P}{r}\cos\theta\\ \psi=\frac{1}{2\pi}\frac{P}{r}\sin\theta\end{cases}$$

Lignes de courant $\psi = C^{te}$:

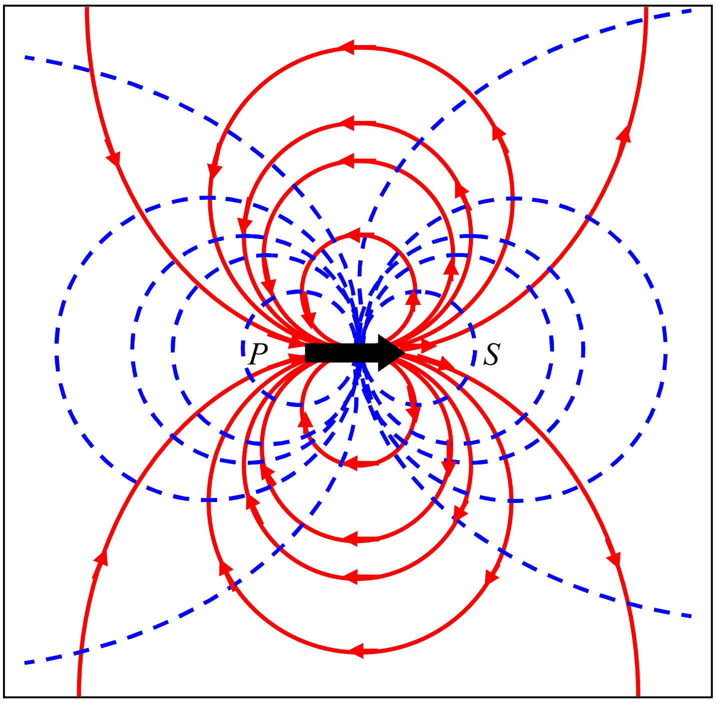
$$\frac{1}{2\pi}\frac{P}{r}\sin\theta=C^{te}\Rightarrow\frac{1}{r}\sin\theta=C^{te}\Rightarrow r\sin\theta=C^{te}r^2\Rightarrow y=C^{te}(x^2+y^2)\Rightarrow x^2+y^2-Ky=0$$

$x^2+\left(y-\frac{K}{2}\right)^2=\left(\frac{K}{2}\right)^2$ Les lignes de courant sont des cercles centrés sur l'axe des *y* et tangents à l'axe des *x*.

Lignes de courant $\psi = C^{te}$: équation d'un cercle de centre (0,K/2) et de rayon K/2

Equipotentielles : $\varphi= C^{te}$: $\frac{1}{r}\cos\theta=C^{te}\Rightarrow\frac{x}{x^2+y^2}=k\Rightarrow\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2$

Cercles centrés sur l'axe des *x*, et tangents à l'axe des *y*.



VI-1 Coins et points d'arrêt

On appelle « point d'arrêt » un point où la vitesse est nulle. Les lignes de courant pouvant être assimilées à des barrières infranchissables, celles passant par le point d'arrêt forment des coins d'arrêt.

Application : écoulement autour de coins ou de dièdres

On Considère un écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses :

$$f(z)=mz^{n+1} \text{ où } n \geq -1/2$$

en coordonnées cylindriques : $z=re^{i\theta}$ et donc $f(z)=mr^{n+1}e^{i(n+1)\theta}$

$$f(z)=mr^{n+1}[\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta] = \varphi+i\psi$$

On a alors $\begin{cases}\varphi(r,\theta)=mr^{n+1}\cos((n+1)\theta)\\ \psi(r,\theta)=mr^{n+1}\sin((n+1)\theta)\end{cases}$ et le champ de vitesse obtenu ainsi:

$$\vec{V}\begin{cases} v_r=\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}=m(n+1)r^n\cos((n+1)\theta)\\ v_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial r}=-m(n+1)r^n\sin((n+1)\theta)\end{cases}$$

On remarque que la vitesse s'annule si $r = 0$. L'origine est donc un point d'arrêt. Les lignes de courant passant par l'origine vérifient :

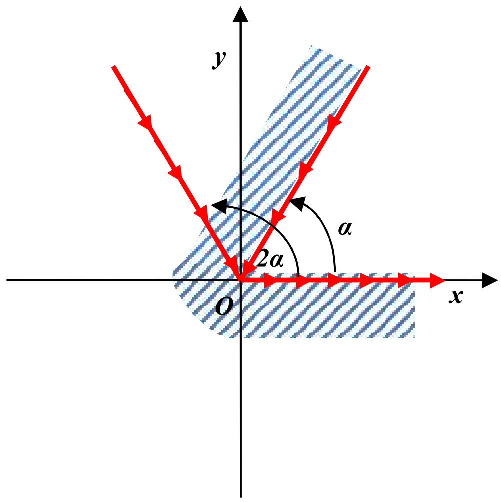
$$\psi(r,\theta)=C^{te}=mr^{n+1}\sin((n+1)\theta)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0\\ \sin((n+1)\theta)=0\end{cases} \Rightarrow \theta=\frac{k}{(n+1)}\pi \quad (k\in Z)$$

Si $k = 0 : \theta = 0 \Rightarrow$ demi droite (Ox)

Si $k = 1 : \theta = \pi/n{+}1=\alpha \Rightarrow$ demi droite d'angle α avec (Ox)

Si $k = 2 : \theta = 2\pi/n{+}1=\alpha \Rightarrow$ demi droite d'angle 2α avec (Ox)

Les lignes de courant pouvant être assimilées à des barrières infranchissables, celles passant par le point d'arrêt forment des « coins » : ce sont les ***coins d'arrêt***.



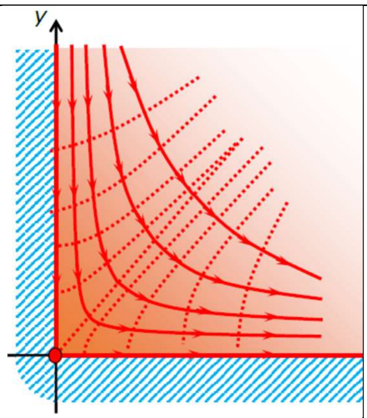
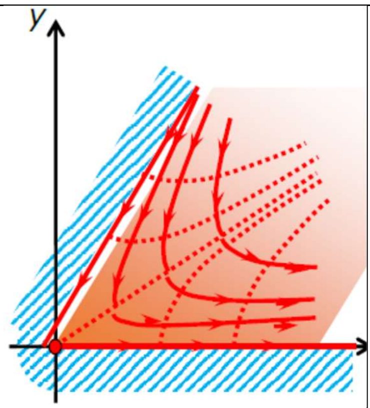
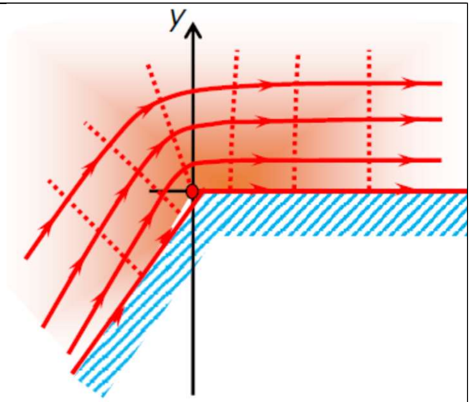
Etudions maintenant l'écoulement du fluide entre ces coins d'arrêt pour quelques valeurs particulières de n.

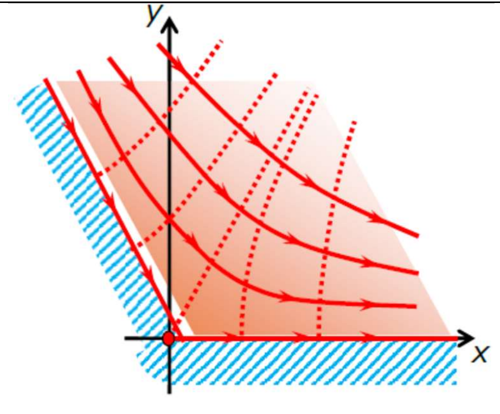
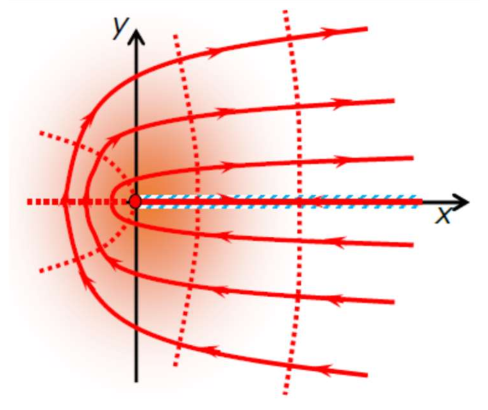
Cas où n=1

$$\psi(r,\theta) = mr^2 \sin(2\theta) = C^{te} \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{n+1} = \frac{\pi}{2} \text{ coin à angle droit}$$

$$\Rightarrow \psi(r,\theta) = 2mr^2 \sin\theta \cos\theta = 2mr \sin\theta \; r\cos\theta = C^{te} \Leftrightarrow 2mxy = Cte \Rightarrow y = \frac{C^{te}}{x}$$

À l'intérieur de ce coin les lignes de courant sont des hyperboles. Les équipotentielles le sont également.

		
$y = \dfrac{C^{te}}{x}$	Cas où $n > 1 \; \alpha = \dfrac{\pi}{n+1} < \dfrac{\pi}{2}$	Cas où $-\dfrac{1}{2} < n < 0 \;\; \pi < \alpha = \dfrac{\pi}{n+1} < \dfrac{\pi}{2}$
les lignes de courant sont des hyperboles	écoulement autour d'un coin aigu	écoulement autour d'un dièdre

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Cas où $0 < n < 1$ $\frac{\pi}{2} < \alpha = \frac{\pi}{n+1} < \pi$</td>
<td>$m = - \frac{1}{2}$ $\alpha = 2\pi$</td>
</tr>
<tr>
<td>écoulement autour d’un coin obtus</td>
<td>contournement d’un demi-plan</td>
</tr>
</table>