Chap 5 Dynamique des fluides parfaits

Nous nous proposons maintenant de faire de la dynamique, c'est-à-dire de considérer non seulement des mouvements, mais aussi des efforts, une loi de comportement et d'appliquer le principe fondamental de la dynamique. Nous nous limiterons aux mouvements des fluides parfaits, c'est-à-dire sans frottement (fluides non visqueux) et sans échange de chaleur, ou encore un fluide dont les transformations sont thermodynamiquement réversibles. Nous étudierons tout particulièrement le cas de fluides incompressibles.

I- Equation d'Euler

I-1 Forces subies par un fluide parfait

a/ Forces surfaciques

Délimitons à l'intérieur d'un fluide « homogène on non » une surface fictive $\sum$ fermée, les particules du fluide extérieures à $\sum$ exercent des actions sur les particules internes. Nous schématisons sur la Fig 5. 1 la force exercée sur un élément de surface dS de $\sum$. Elle a pour composantes :

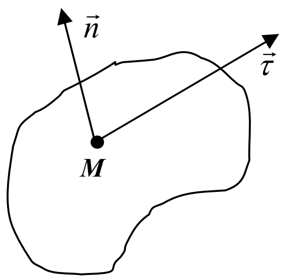


Fig 5. 1

La composante normale : $d\vec{F}_N = -p(M,t)\,\vec{n}\,dS$: force de pression

La composante tangentielle qui est liée aux frottements causés par la viscosité est **nulle au cadre de ce cours**.

b/ Forces de volume – Forces de volume

Un élément de fluide de volume $d\tau$ est également soumis à des forces volumiques. Ces actions sont ressenties par toutes les particules du fluide, elles sont donc proportionnelles au volume élémentaire $d\tau$ considéré.

$$d\vec{f} = \vec{f}_v d\tau \text{ : Efforts volumiques}$$

I-2 Equation d'Euler

Une particule $M(x_1, x_2, x_3)$ d'un fluide parfait est soumise aux :

- Forces volumiques : $\vec{F}dm = \rho\vec{F}d\vartheta$
- Forces surfaciques : $-p\vec{n}dS$

Par conséquent le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $\rho\vec{\gamma}d\vartheta = \rho\vec{F}d\vartheta - p\vec{n}dS$. Soit en sommant sur tout le volume ϑ de frontière S :

$$\iiint_{\vartheta} \rho\vec{\gamma}d\vartheta = \iiint_{\vartheta} \rho\vec{F}d\vartheta - \iint_{S} p\vec{n}dS$$

$$\iiint_{\vartheta} \rho\vec{\gamma}d\vartheta = \iiint_{\vartheta} \left(\rho\vec{F} - \vec{\nabla}p\right)d\vartheta \qquad \forall\,\vartheta$$

D'où : $\rho\vec{\gamma} = \rho\vec{F} - \vec{\nabla}p$ c'est ***l'équation d'Euler locale.***

On peut la trouver l'équation d'Euler sur d'autres formes :

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{F} - \vec{\nabla}p$$

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{rot}\,\vec{V}\right)\wedge\vec{V}\right] = \rho\vec{F} - \vec{\nabla}p$$

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right] = \rho\vec{F} - \vec{\nabla}p$$ ou sous forme indicielle $$\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}u_i\right] = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Si $\vec{F}$ se réduit aux forces de pesanteur (cas souvent rencontré), x_3 étant vertical **ascendant** :

$$F_1 = F_2 = 0 \text{ et } F_3 = -g$$

I-3 Résolution de l'équation d'Euler

Ne perdons pas de vue que dans un problème de mécanique des fluides on a six inconnues : la masse volumique ρ, le champ de vitesse avec ses trois composantes $\vec{V}(u_1, u_2, u_3)$, la pression P et la température T. Jusqu'à maintenant on dispose de 4 équations : l'équation de continuité et les trois équations d'Euler. On doit donc compléter le système par 2 équations complémentaires qui sont :

- l'équation d'état du fluide $f(\rho, P, T)=0$ par exemple : fluide incompressible, gaz parfait, fluide barotrope, ….etc ;
- Une équation thermodynamique décrivant la transformation que subit le fluide au cours de son écoulement par exemple : transformation isotherme, adiabatique, ….etc.

I-4 Conditions aux limites

Ce sont des conditions nécessaires pour fermer le système d'équations cité en dessus, dans le cas des écoulements en conduites ou en contact d'un obstacle ou paroi solide en général. On exprime alors la condition de glissement pour la composante tangentielle de la vitesse $\vec{V} \cdot \vec{\tau} \neq 0$, et la condition de non perméabilité à la paroi $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$.

II-Théorème de Bernoulli* (Loi de conservation de l'énergie)

II-1 Démonstration

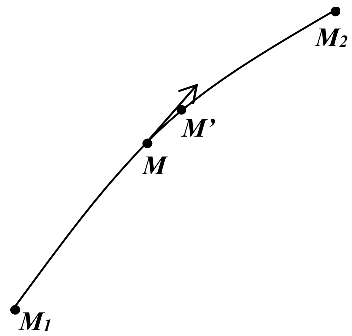
Nous supposerons que le fluide parfait est en mouvement permanent dans le champ de la pesanteur ; nous admettrons en outre que ce fluide est .incompressible. En tenant compte de ces hypothèses, et en explicitant l'accélération $\vec{\gamma}$, l'équation d'Euler s'écrit:

$$\overrightarrow{grad}\frac{p}{\rho} = \overrightarrow{grad}(-gh) - \overrightarrow{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V} - \overrightarrow{grad}\frac{V^2}{2}$$

soit :

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{V^2}{2}\right) = -\overrightarrow{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V}$$

Cette relation est valable en n'importe quel point M du fluide en mouvement ; mais, en général, on ne possède aucun renseignement sur le produit vectoriel rot $\overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}$. Dans le but d'éliminer celui-ci, nous multiplierons scalairement les deux membres de l'égalité précédente par le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, M' étant un point infiniment voisin de M situé sur la même ligne de courant que celui-ci ; il vient ainsi :



$$d\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad (5.\ 1)$$

En intégrant l'équation (5. 1) le long d'une même ligne de courant entre deux points M_l et M_2 on obtient : $\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{V^2}{2}\right)_{M_1} = \left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{V^2}{2}\right)_{M_2}$ ou encore :

$$\left(\frac{p}{\rho g} + h + \frac{V^2}{2g}\right)_{M_1} = \left(\frac{p}{\rho g} + h + \frac{V^2}{2g}\right)_{M_2} \quad (5.\ 2)$$

Les différents termes qui interviennent dans cette égalité sont homogènes à des longueurs :

---

* Daniel Bernoulli est un médecin, physicien et mathématicien suisse, né à Groningue le 8 février 1700, et mort à Bâle, le 17 mars 1782.

- le terme $\dfrac{p}{\rho g} + h = \dfrac{p^*}{\rho g}$ qu'il est possible de mesurer au moyen d'un tube piézométrique, s'appelle "la hauteur piézométrique" ;
- le terme $\dfrac{V^2}{2g}$ est appelé "la hauteur due à la vitesse" ;
- enfin, la somme $\dfrac{p^*}{\rho g} + \dfrac{V^2}{2g}$ s'appelle "la charge" au point considéré.

Le théorème de Bernoulli, qui traduit l'égalité (5. 2), peut alors s'énoncer ainsi :

"Dans un fluide parfait isovolume, en mouvement permanent dans le champ de la pesanteur, la charge demeure constante tout le long d'une même ligne de courant."

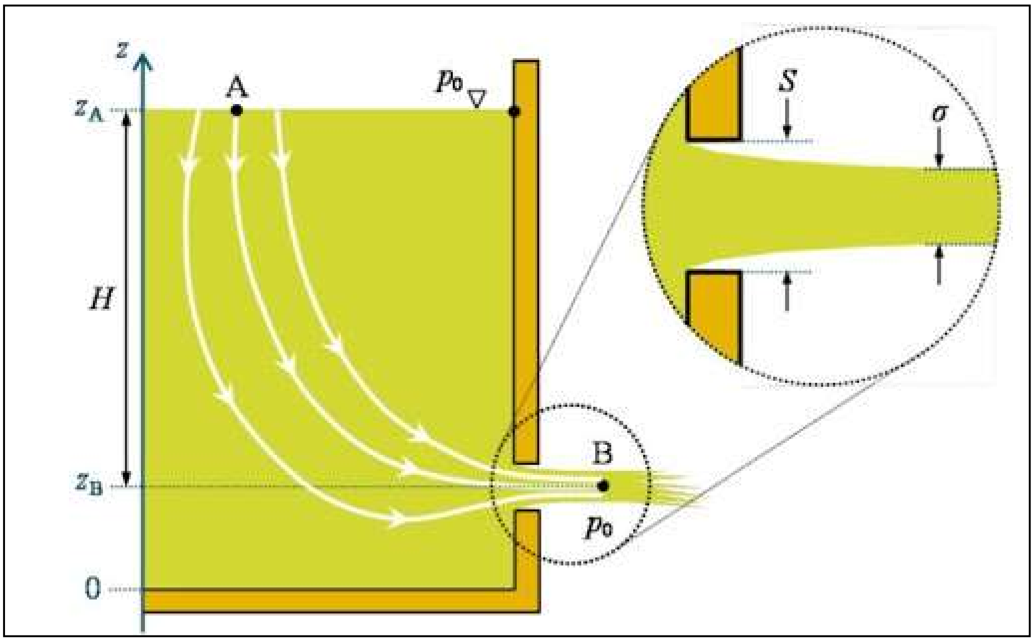
Remarque

Dans le cas où $\overrightarrow{rot}\vec{V}$ dans toute la masse fluide en mouvement, c'est-à-dire lorsqu'il existe un potentiel des vitesses, la relation (5. 1) demeure valable même si le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ n'est pas tangent à une ligne de courant d'où le théorème de Lagrange

"La charge demeure constante en tout point d'un fluide parfait incompressible (isovolume), en mouvement permanent et irrotationnel, dans le champ de la pesanteur".

II-2 Formule de Torricelli

Considérons un bassin de grandes dimensions contenant un liquide maintenu à un niveau constant. Dans la paroi de ce bassin, on a percé un trou O de très petite section S. L'observation du filet liquide qui s'échappe par l'orifice O montre que sa section présente un minimum à une très faible distance de cet orifice; soit Se l'aire de cette section contractée. Etant données les faibles dimensions de σ, on peut admettre que la pression à l'intérieur de la section contractée est uniforme, et égale à la pression atmosphérique puisque son contour est en contact avec l'atmosphère. D'autre part, l'expérience montre que si aucune perturbation ne vient troubler l'écoulement à l'intérieur du bassin, le liquide s'écoule à la manière d'un fluide parfait.



Ecrivons alors l'équation de Bernoulli entre deux points *A* et *B* situés sur une même ligne de courant; le point *A* étant pris dans la surface libre du liquide, le point *B* étant pris dans la section contractée.

$$\left(\frac{p}{\rho g}+h+\frac{V^2}{2g}\right)_A=\left(\frac{p}{\rho g}+h+\frac{V^2}{2g}\right)_B \qquad (5.\ 3)$$

Puisque d'une part P_A et P_B sont toutes les deux égales à la pression atmosphérique, et que d'autre part V_A est pratiquement-égal à zéro du fait des grandes dimensions du bassin ; l'égalité (5. 3) se réduit à : $h_A = h_B + \frac{V_B^2}{2g}$.

Enfin comme la section contractée est très près de l'orifice, on a sensiblement : h_A-h_B=*H*.
H désignant la hauteur de la surface libre au dessus de l'axe de l'orifice *O*. On obtient alors la formule de Torricelli qui donne la vitesse en un point quelconque de la section contractée :

$$V=\sqrt{2gH} \qquad (5.\ 4)$$

Remarquons que cette vitesse est égale à celle d'un corps tombant en chute libre, sans vitesse initiale, d'une hauteur H. En réalité la vitesse V est très légèrement inférieure à la valeur théorique donnée par la relation (5. 4), on pose alors : $V=C_v\sqrt{2gH}$

C_v étant un coefficient inférieur à l'unité appelé "coefficient de vitesse".

Le débit de l'orifice est : $Q=\sigma V=C_v SV$

Soit : $Q=C_c C_v S\sqrt{2gH}$.

$C_c = \frac{\sigma}{S}$ étant un coefficient inférieur à l'unité appelé « coefficient de contaraction », dont la valeur est très voisine de la valeur théorique $C_c = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0{,}611$.

On pose habituellement, pour les orifices et les ajustages : $Q = C_q\sqrt{2gH}$, C_q étant le coefficient de débit. Dans le cas présent on a sensiblement : C_q=C_c=0,611.

II-3 Equation de Bernoulli généralisée

Nous nous proposons d'établir une équation analogue l l'équation de Bernoulli en formulant des hypothèses moins restrictives.

Nous considérerons un fluide parfait, pour lequel la masse volumique ρ ne dépend que de la pression, en mouvement non permanent dans un champ de force dérivant d'une fonction de potentiel U Dans ces conditions, l'équation d'Euler peut s'écrire :

$$\overrightarrow{grad}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho} = \overrightarrow{grad}U - \left(\overrightarrow{rot}\,\vec{V}\wedge\vec{V} + \overrightarrow{grad}\,\frac{V^2}{2} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)$$

Soit en posant $G = \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho} - U + \frac{V^2}{2}$: $G = -\overrightarrow{rot}\,\vec{V}\wedge\vec{V} - \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$

Multiplions scalairement les deux membres de cette égalité par le vecteur $\overrightarrow{MM} = \vec{dl}$, M et M' étant deux points infiniment voisins situés sur une même ligne de courant :

$$dG + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\cdot\vec{dl} = 0 \quad (5.\ 5)$$

Avec *dG=G(M',t)-G(M,t)*

G(M, t) désignant la valeur prise par la fonction **G** au point *M* et à l'instant *t* ; *G(M', t)* désignant la valeur prise par la fonction *G* au point *M'* et au même instant *t*.

En intégrant l'équation (5. 5) ***le long d'une ligne de courant*** dessinée dans le fluide à l'instant *t*, on obtient la relation cherchée :

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{\rho} - (U_1 - U_2) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + \int_{M_1M_2}\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\cdot\vec{dl} = 0 \quad (5.\ 6)$$

Cette relation se réduit évidemment à la relation de Bernoulli classique lorsque $\rho = C^{te}$, $U = -gh$ et $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$

III- Théorème d'Euler (Loi de conservation de la quantité de mouvement)

Une analyse de mécanique des fluides peut être conduite à deux échelles différentes : l'une, qui s'applique à un volume élémentaire de fluide, demande la résolution (généralement numérique) des équations aux dérivées partielles (équation d'Euler) en y adjoignant celle relative à la conservation de la masse ainsi que les conditions aux limites du volume étudié. Cette analyse permet de connaître le champ de vitesse et le champ de pression en tout point du fluide. L'autre analyse, relative à un **volume macroscopique** de fluide, appelé **volume de contrôle**, convient à l'utilisateur qui cherche une solution globale.

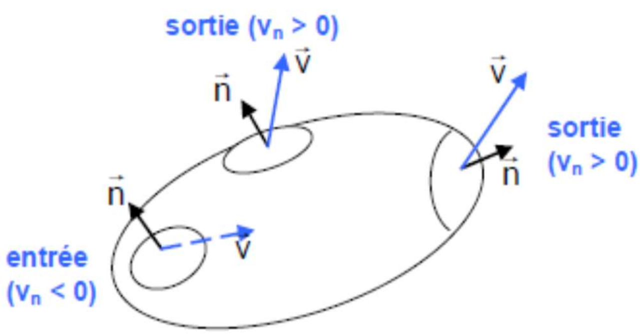
Pour les applications, il est souvent préférable de raisonner en considérant un volume de contrôle fixe, choisi arbitrairement (ou judicieusement suivant le problème que l'on se pose) dans l'écoulement, sous la seule restriction d'avoir une surface limite entièrement constituée de particules fluides. Nous allons donc dans cette partie donner une nouvelle formulation du bilan de quantité de mouvement. Nous nous placerons en **régime permanent**.

III-1 Équation intégrale de la quantité de mouvement : théorème d'Euler (ou théorème des quantités de mouvement)

En régime permanent, l'équation d'Euler s'écrit : $\rho\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p$

Prenons l'intégrale sur un domaine de contrôle quelconque ϑ de l'écoulement délimité par la surface fermée S de normale extérieure $\vec{n}$; la surface S comprend une surface solide imperméable au fluide ($v_n = \vec{V}\cdot\vec{n}$ est nul en tous ses points) et des surfaces traversées par le fluide : aux entrées v_n est négatif tandis qu'aux sorties v_n est positif.

$$\iiint_{\vartheta} \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V}\,d\vartheta = \iiint_{\vartheta} -\vec{\nabla}p\,d\vartheta + \iiint_{\vartheta} \rho\,\vec{g}\,d\vartheta$$



Et appliquons le théorème d'Ostrogradski

$$\oiint_S \rho\vec{V}\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)dS = \oiint_S -p\cdot\vec{n}dS + \iiint_{\vartheta} \rho\vec{g}\,d\vartheta$$

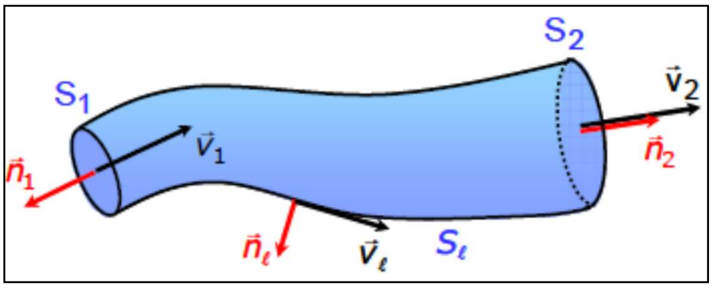
C'est l'expression vectorielle du ***théorème d'Euler***, encore appelé ***théorème des quantités de mouvement***, qui stipule que :

> Le flux de quantité de mouvement à travers une surface de contrôle fixe d'un ***écoulement permanent*** est égal à la résultante des forces extérieures appliquées au fluide dans le domaine limité par cette surface.

III-2 Cas d'un tube de courant

Appliquons le théorème à une portion de ***tube de courant*** d'un ***fluide parfait*** pour lequel les ***vitesses sont constantes dans chacune des sections droites***.

Pour cela nous définissons le domaine de contrôle limité par la surface $S = S_1 + S_\ell + S_2$ où S_1 et S_2 sont les deux sections droites situées respectivement à l'entrée et à la sortie du tube et S_ℓ la surface latérale formée des lignes de courant s'appuyant sur S_1 et S_2. Les vecteurs unitaires des normales à ces surfaces, orientés positivement vers l'extérieur du domaine, sont désignés respectivement par $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_l$



En appliquant l'expression vectorielle du théorème d'Euler au domaine que nous venons de définir et en décomposant les surfaces, on a :

$$\vec{v}_1 \iint_{S_1} \rho \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \vec{v}_2 \iint_{S_2} \rho \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = \iint_{S_1} - p_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{S_2} - p_2 \cdot \vec{n}_2 dS + \iint_{S_l} - p \cdot \vec{n}_l dS \iiint_{\vartheta} \rho \vec{g} d\vartheta$$

Les deux premiers termes du membre de gauche peuvent s'exprimer en fonction du débit massique qui, en régime permanent, se conserve à travers un tube de courant :

$$\dot{m} = -\iint_{S_1} \rho \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{S_2} \rho \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 dS$$

Si l'on suppose, pour simplifier, que les pressions sont également uniformes sur les sections, S_1 et S_2* l'expression peut se mettre sous la forme :

$\dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ $=$	$- p_1 S_1 \vec{n}_1 - p_2 S_2 \vec{n}_2 +$	$\iint_{S_l} - p \cdot \vec{n}_l dS \quad +$	$m\vec{g}$
variation du débit de quantité de mouvement	forces de pression exercées par le fluide extérieur en contact avec lui au niveau des sections droites S_1 et S_2	forces de pression exercées sur le fluide par les parois latérales du tube	forces extérieures de pesanteur

On retiendra que : $\boxed{\dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \sum \vec{F}_{ext}}$

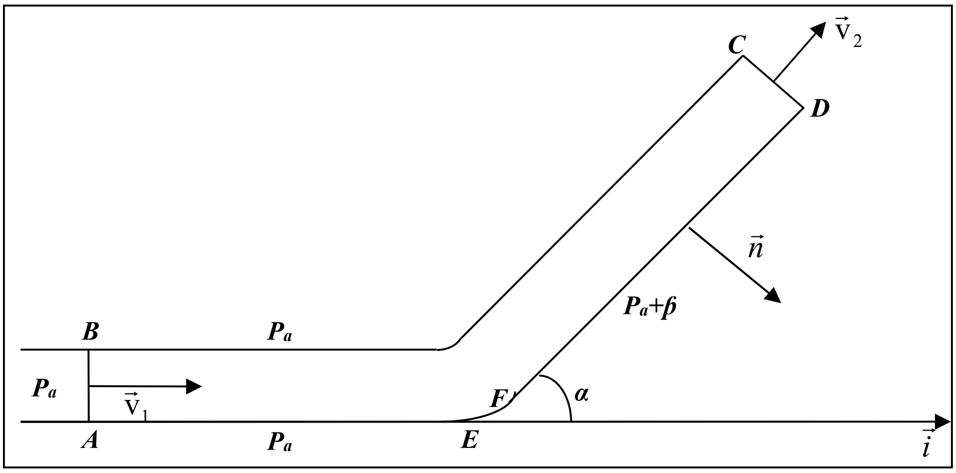
* Si, en entrée et en sortie, l'écoulement est rectiligne les pressions piézométriques p + ρgz y sont constantes. **La variation d'altitude ayant un effet énergétique négligeable**, les pressions p sont constantes

III-3 Application du théorème d'Euler

Un jet bidimensionnel arrive horizontalement sur une plaque plane fixe avec une vitesse uniforme $\vec{v}$. Supposons que le fluide ne soit dévié que dans une seule direction grâce à l'épaulement EF.

Appliquons le théorème d'Euler à la surface de référence ABCD :

$$\dot{m}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = \vec{R} + \vec{P} \qquad (5.\ 7)$$



Le théorème de Bernoulli appliqué sur la LDC BC donne :

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_a + \rho g h_B = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_a + \rho g h_C \Rightarrow v_1=v_2=v$$

En projetant sur $\vec{i}$ (5. 7) donne :

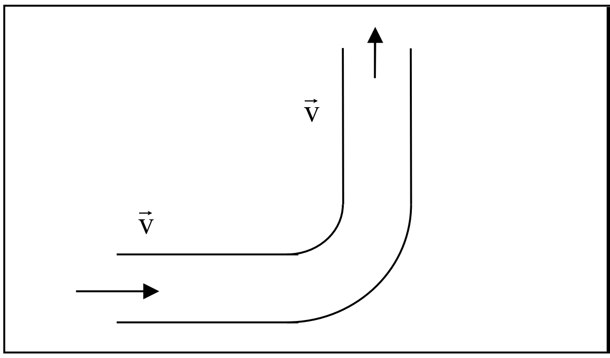
$$\dot{m}\,(v_2 cos\alpha - v_1) = R_x = \dot{m}\,v\,(cos\alpha - 1)$$

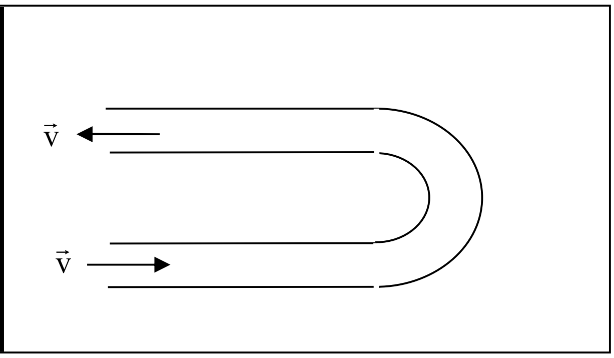
$R = -\iint_S - p \cdot \vec{n}dS$ est la résultante des forces de pression sur ABCD

$$R = \iint_S -P_a \cdot \vec{n}dS - \int_E^F p \cdot \vec{n}dS$$

La première intégrale est nulle car S est une surface fermée. La deuxième intégrale représente l'action de la plaque sur le jet. D'où $\vec{A} = -\vec{R}$ est l'action du jet sur la plaque. Donc :

$$A_x = \dot{m}\,v\,(1 - cos\alpha)$$





Plaque Coude

$$\alpha = \frac{\pi}{2}; \; A_x = \dot{m}\,\mathrm{v}$$

Plaque recourbée

$$\alpha = \pi; \; A_x = 2\,\dot{m}\,\mathrm{v}$$

Bibliographie

P. GUEVEL- Mécanique des fluides : dynamique des fluides parfaits, écoulements laminaires des fluides visqueux et éléments d'hydraulique industrielle. Collection ENSM. Nantes ;

P. CHASSAING- Mécanique des fluides - Éléments d'un premier parcours, Collection Polytech.

Sébastien CANDEL, Mécanique des fluides, Dunod Paris.

R COMOLET, Mécanique expérimentale des fluides - Statique et dynamique des fluides non visqueux, Masson.

J-B. Evett, R-V. Giles, C. Liu,: Mécanique des Fluides et hydraulique, Série Schaum Mc Graw hill