Solution

<u>Questions de cours</u> **(4 pts : dem :3 ; cas ½ ; 1/2)**

Voir séance de cours.

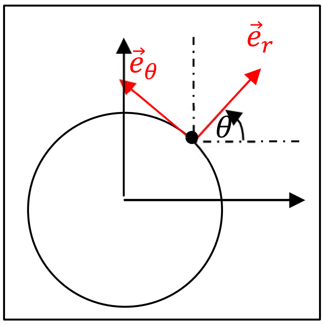
<u>EXERCICE 1</u> **: (7 pts)**

1/ $$\vec{U} = \begin{cases} u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{A}{r} + B\cos\theta \\ u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -B\sin\theta \end{cases}$$ **1 pts**

Les points d'arrêts correspondent aux points aux composantes u_r et u_θ nulles : donc, le point de cordonnées $\left(\frac{A}{B}, \pi\right)$. **(1pts)**

2/ En partant des équations :

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$
$$e_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$



Et en sommant sur $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ on retrouve : **(2pts)**

$$u_x = \frac{A}{r^2}(r\cos\theta) + B = \frac{Ax}{x^2+y^2} + B$$
$$u_y = \frac{A}{r^2}(r\ \sin\theta) = \frac{Ay}{x^2+y^2}$$
$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{A}{r} + B\cos\theta \quad (1)$$
$$u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -B\sin\theta \quad (2)$$

$\boxed{3/}$ (1) et (2) permettent de conclure que $\boxed{\psi(r,\theta) = Br\sin\theta + A\theta}$ **(0.5 pts)**

$$f(z) = \varphi + i\psi = A[ln(r) + i\theta] + B[r\ \cos\theta + i\,r\ \sin\theta]$$

Donc $$f(z) = A\ ln(z) + Bz$$ **(0.5 pts)**

4/ L'écoulement présenté est la superposition d'un écoulement uniforme et d'n écoulement source. **(1pts)**

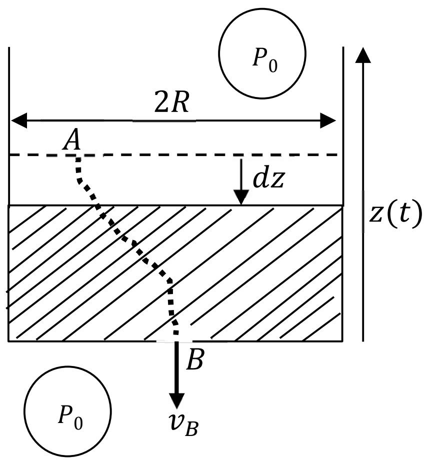
5/ $w(z) = \frac{df}{dz} = \frac{A}{z} + B = \frac{A}{r}\cos\theta + B - i\frac{A}{r}\sin\theta = u_x - i\,u_y$

Donc : **(1pts)**

$$u_x = \frac{A}{r^2}(r\cos\theta) + B = \frac{Ax}{x^2+y^2} + B$$
$$u_y = \frac{A}{r^2}(r\ \sin\theta) = \frac{Ay}{x^2+y^2}$$

<u>EXERCICE 2</u> : **(9pts)**

1/ On applique le théorème de Bernoulli entre un point A de la surface libre, et le point de sortie B :



$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + z_A = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + z_B \quad (1)$$

Or : $v_A \approx 0;\ P_A = P_B = P_0\,;\ z_B = 0;\ z_A = z(t)$ donc (1) donne :

$$z(t) = \frac{v_B^2}{2g} \quad (2)$$

Pendant un laps de temps dt le débit volumique :

$$Q_v = s \times v_B = -a^2 \frac{dz}{dt} \ (3)$$

A partir de (2) et (3), on aboutit à : **(3pts)**

$$\boxed{\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{\sqrt{2g}}{a^2} s dt \quad (4)}$$

L'intégration de (4) avec la condition initiale à $t = 0: z = H/2$, donnent :

$$z(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{g}}{a^2} s \cdot t\right)^2 \ (5)$$

2/ La durée t_c de vidange de ce réservoir correspondra à $z(t) = 0$, donc :

$$\boxed{t_c = \frac{a^2}{s}\sqrt{\frac{a}{g}}}$$

AN : $t_c = 452{,}54\ s$ **(3 pts)**

3/ (5) peut être réécrite sous la forme

$$z(t) = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^2 \ (6)$$

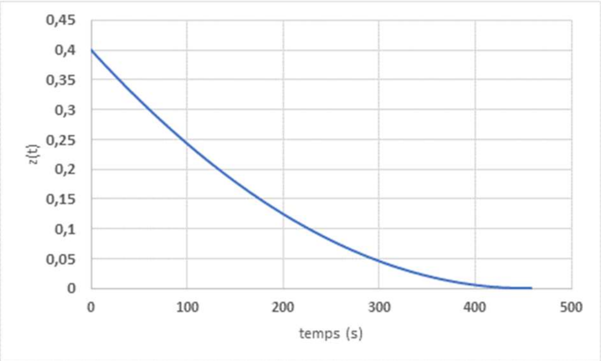
La hauteur correspondante à t'_c est $a/8$, et donc par substitution de ces paramètres en (6) on aboutira à :

$$\boxed{t'_c = \frac{t_c}{2}}$$

AN : $t'_c = 226{,}27\ s$. **(1 pts)**

La hauteur correspondante à t''_c est $a/4$, et donc par substitution de ces paramètres en (6) on aboutira à :

$$\boxed{t''_c = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) t_c}$$



AN : $t''_c = 132{,}54\ s$. **(1 pts)**

Courbe 1pts