SOLUTIONS

EXERCICE 1

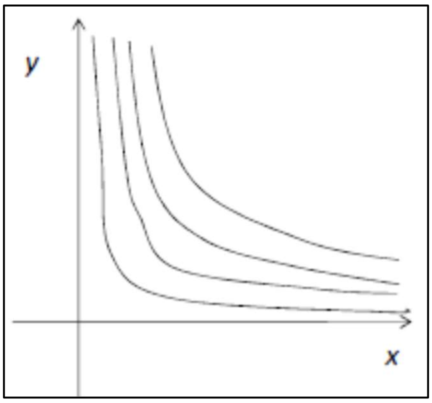
1. $\vec{V} = \begin{cases} u = Ax \\ v = -Ay \end{cases}$; $A = 1s^{-1}$

Les composantes de la vitesse ne dépendent pas du temps, donc l'écoulement est stationnaire (ou permanent) ;

2. $div\,\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Donc l'écoulement est incompressible (ou isovolume), et l'équation de continuité est vérifiée ;

3. Les lignes de courant obéissent à l'équation suivante : $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ à t fixe, soit $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$



Par intégration on trouve $|y| = \frac{K}{|x|}$, avec K une cst d'intégration. Les lignes de courant sont des hyperboles, qu'on représente pour le quart du plan ($x > 0\,, y > 0$).

4. Les trajectoires sont définies par la relation suivante :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{u} = dt \\ \frac{dy}{v} = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = Adt \\ \frac{dy}{y} = Adt \end{cases}$$

Par intégration $\begin{cases} x = k_1 e^{At} \\ y = k_2 e^{-At} \end{cases}$ A $t = 0 \begin{cases} x_0 = k_1 = 1 \\ y_0 = k_2 = 1 \end{cases}$ soit $xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

Les trajectoires ont donc des hyperboles. Elles sont confondues aux lignes de courant, car l'écoulement est stationnaire.

5. Accélération suivant Lagrange :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left| \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = A^2 e^{At} = A^2 x \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = A^2 e^{-At} = A^2 y \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \gamma_x = A^2 x \\ \gamma_y = A^2 y \end{array} \right.$$

Suivant Euler :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Soit en dorme indicielle

$$\vec{\gamma} = \left| \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = A^2 x \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = A^2 y \end{aligned} \right.$$

Donc les deux approches se valent.

<u>EXERCICE 2</u>

1/ $div\,\vec{c} = \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} = 0$ l'écoulement incompressible.

2/ $\gamma_1 = \frac{\partial c_1}{\partial t} + c_1\frac{\partial c_1}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial c_1}{\partial x_2} = -5x_1$

$$\gamma_2 = \frac{\partial c_2}{\partial t} + c_1\frac{\partial c_2}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial c_2}{\partial x_2} = -5x_2$$

3/ Les LDC sont solutions de

$$\frac{dx_1}{c_1} = \frac{dx_2}{c_2}$$

Soit

$$\frac{dx_1}{2x_1 - 3x_2} = \frac{dx_2}{3x_1 - 2x_2}$$

Donc $3(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) - 2(x_2 dx_1 + x_1 dx_2) = 0$ et en intégrant :

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{4}{3}x_1 x_2 = c$$

L'équation trouvée ne nous permet pas de déduire la forme des LDC. On utilisera la méthode générale des matrices, pour trouver une forme quadratique des LDC :

$$(x_1;\ x_2)\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c$$

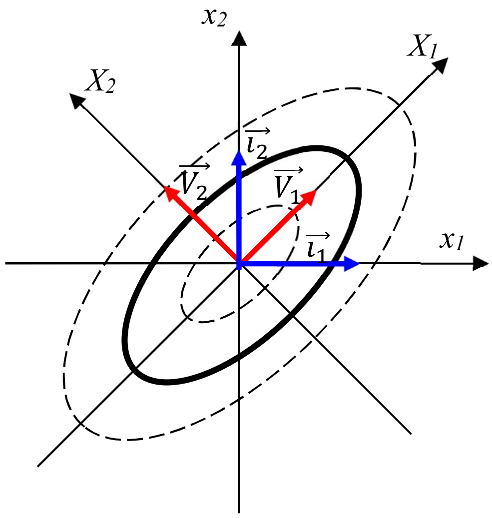
La matrice admet la valeur propre $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ correspondant au vecteur propre unitaire $\overrightarrow{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la valeur propre $\lambda_2 = \frac{5}{3}$ correspondant au vecteur propre unitaire $\overrightarrow{V_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans $\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right)$ la forme quadratique s'écrit

$$(X_1;\ X_2)\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} ou \ \frac{X_1^2}{\left(\sqrt{3c}\right)^2} + \frac{X_2^2}{\left(\sqrt{\frac{3c}{5}}\right)^2} = 1$$

L'équation correspond à des ellipses admettant pour axes de symétrie, l'axe portant $\overrightarrow{V_1}$ (1ère bissectrice) et l'axe portant $\overrightarrow{V_1}$ (2ème bissectrice) et de demi axes $\sqrt{3c}$ et $\sqrt{\frac{3c}{5}}$

L'ellipse passant par (1,1) correspond à c =$\frac{2}{3}$ c'est l'ellipse de demi axe : $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0{,}63$



4/ $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{c} = 3\vec{k}$

Le champ des vecteurs tourbillon est uniforme. Les lignes tourbillons sont alors des droites parallèles à l'axe des x_3.

5/ $\Gamma = 2\iint_S \ \vec{\Omega}\cdot\vec{n}\cdot ds = 2\iint_S \ \Omega\cdot ds = 2\Omega S = 2\times 3(\pi ab) = 12\pi\frac{\sqrt{5}}{5}m^2/s$

EXERCICE 3

Source à l'origine $\vec{V} = \frac{a}{r}\vec{e}_r = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$, le potentiel φ est tel que : $\begin{cases} v_r = \frac{a}{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} & (1) \\ v_\theta = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} & (2) \end{cases}$

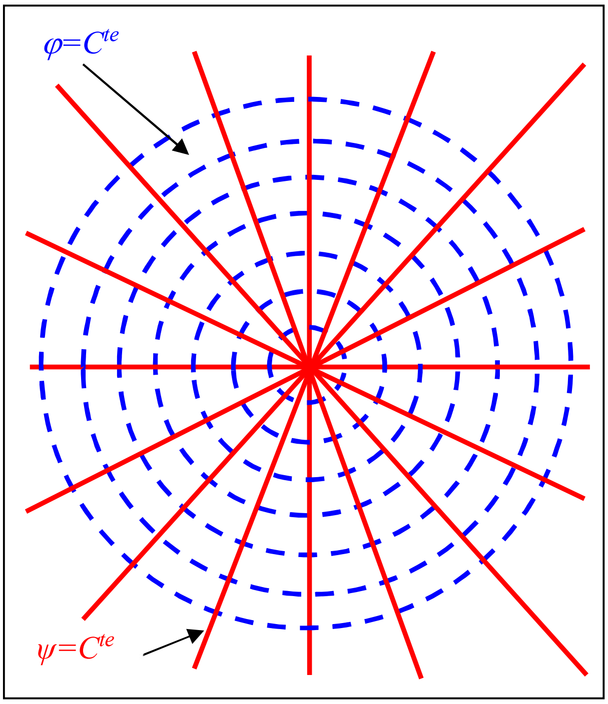
$(2) \Rightarrow \varphi = \varphi(r)$; $(1) \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{r} \Rightarrow \varphi(r) = a\ln(r) + c$

Les équipotentielles sont telles que $\varphi = cst \Rightarrow r = cst$. Ce sont des cercles de centre O.

La fonction de courant ψ est telle que : $\begin{cases} v_r = \frac{a}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} & (3) \\ v_\theta = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial r} & (4) \end{cases}$ $(4) \Rightarrow \psi = \psi(\theta)$;

$$(3) \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{d\psi}{d\theta} = a \Rightarrow \psi(\theta) = a\theta + cst$$

Les LDC ont pour équation $\psi = cst \Rightarrow \theta = cst$. Ce sont des demi droites issues de l'origine.



Le débit q_v à travers un cercle de rayon r est : $q_v = \int \vec{V} \cdot \vec{n}\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} r d\theta = a2\pi$ donc $a = \frac{q_v}{2\pi}$

Le potentiel de la source à l'origine est : $\varphi = \frac{q_v}{2\pi} \ln(r)$.

La fonction de de courant de la source est : $\psi = \frac{q_v}{2\pi} \theta$.

Si q_v est positif, on a une source. Si q_v est négatif, on a un puits.

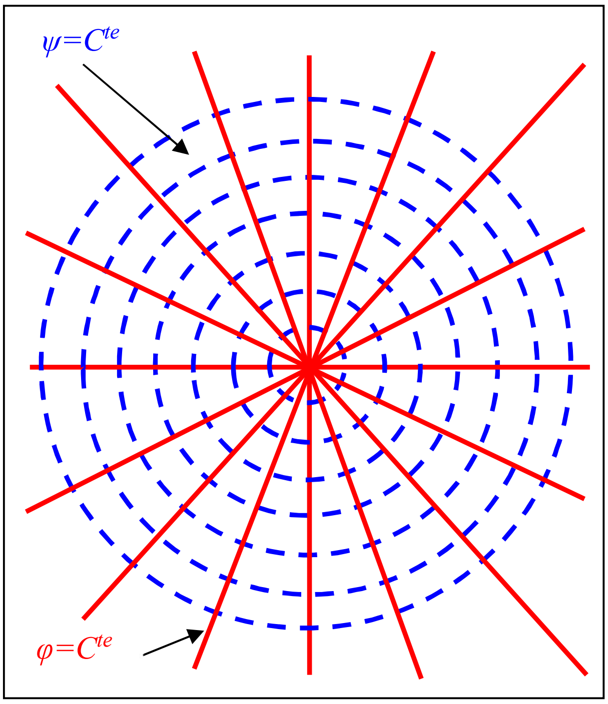
Le tourbillon à l'origine $\vec{V} = \frac{a}{r} \vec{e}_\theta = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$,

Le potentiel φ est tel que : $\begin{cases} v_r = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Rightarrow \varphi = \varphi(\theta) \\ v_\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Rightarrow \varphi = a\theta + c \end{cases}$

Les équipotenielles sont $\varphi = cst \Rightarrow \theta = cst$

La fonction de courant ψ est telle que : $\begin{cases} v_r = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{a}{r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow \psi = \psi(r) = -a\ln(r) + cst;$

Les LDC ont pour équation $\psi = cst \Rightarrow r = cst$.



$$\Gamma = \int \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} r d\theta = a2\pi \Rightarrow a = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

Potentiel du tourbillon : $\varphi = \frac{\Gamma\theta}{2\pi}$. La fonction de courant du tourbillon : $\psi = -\frac{\Gamma\theta}{2\pi}\ln(r)$.

Doublet à l'origine : $\vec{V} = \frac{a}{r^2} cos\theta \vec{e}_r + \frac{a}{r^2} sin\theta \vec{e}_\theta$

Potentiel : $\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{a}{r^2}\ cos\theta \\ \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{a}{r^2}\ sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \varphi = -\frac{a}{r}\ cos\theta + f(\theta) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{a}{r}\ sin\theta + f'(\theta) \end{matrix}$

$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{a}{r}\ sin\theta$ donc $f'(\theta) = 0$ donc $f(\theta) = cst$ d'où : $\varphi = -\frac{a}{r}\ cos\theta + cst$

Fonction de courant : $\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{a}{r^2}\ cos\theta \\ -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{a}{r^2}\ sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \psi = \frac{a}{r}\ sin\theta + f(r) \\ \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{a}{r^2}\ sin\theta + f'(r) \end{matrix}$

Donc $f'(r) = 0$ donc $f(r) = cst$ d'où : $\psi = \frac{a}{r}\ sin\theta + cst$

Les équipotentielles sont φ=cst $\Rightarrow \frac{cos\theta}{r} = cst \Rightarrow \frac{rcos\theta}{r^2} = cst \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = cst$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \lambda x = 0$$

Ce sont des cercles centrés sur l'axe des x et tangent à l'axe des y.

Les LDC sont ψ=cst $\Rightarrow \frac{sin\theta}{r} = cst \Rightarrow \frac{rsin\theta}{r^2} = cst \Rightarrow \frac{y}{x^2+y^2} = cst$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \mu y = 0$$

Ce sont des cercles centrés sur l'axe des y et tangent à l'axe des x.