UNIVERSITE MOULAY ISMAIL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
MEKNES

Année Universitaire 2020-2021
Filière : SMP
Semestre : S6
Parcours : Energétique

MECANIQUE DES FLUIDES PARFAITS
Série 3 : Potentiel complexe des vitesses

EXERCICE 1 : **Ecoulement d'un fluide autour d'un cylindre en rotation**

On étudie l'écoulement irrotationnel et permanent d'un fluide incompressible autour d'un cylindre d'axe Oz et de rayon R, tournant autour de Oz à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$. Très loin du cylindre, le fluide a une vitesse $\vec{V}_\infty = V_\infty\vec{\imath}$, de direction perpendiculaire à Oz. Un point M du fluide sera repéré par ses coordonnées (r, θ, z). L'écoulement peut être considéré comme la superposition de deux écoulements :

* écoulement de potentiel de vitesse : $\varphi_1 = rV_0\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)cos\theta$;
* écoulement de potentiel de vitesse : $\varphi_2 = K\theta$;

1/ Vérifier que l'écoulement résultant dérive d'un potentiel ;

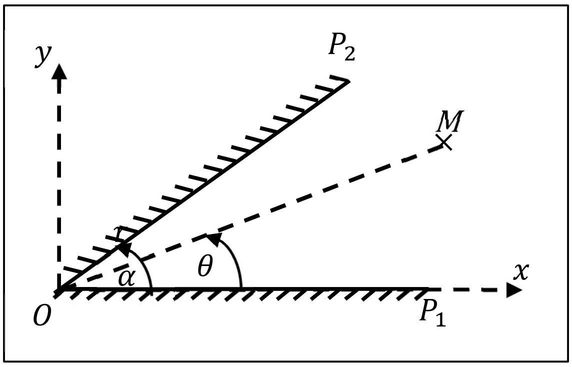
2/ En déduire le champ de vitesse $\vec{V}$ du fluide en $M(r, \theta, z)$;

3/ Calculer la circulation Γ du champ de vitesse de l'écoulement en fonction de K ;

4/ Déterminer suivant les valeurs du paramètre $\alpha = \frac{K}{RV_0}$ les points d'arrêt et leurs positions dans le plan (r, θ).

EXERCICE 2 : **Ecoulement d'un fluide dans un dièdre. Résolution de l'équation de Laplace**

On étudie l'écoulement stationnaire d'un fluide parafait, incompressible et irrotationnel dans un dièdre d'arrêt Oz, limité par les parois planes solides P_1 et P_2 définies par les équations $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$. (Fig ci-dessous)



Le potentiel des vitesses de cet écoulement en $M(r, \theta)$ dans le plan $z = cte$ peut être mis sous la forme : $\varphi(r, \theta) = f(r) \cdot g(\theta)$.

1/ Montrer que le potentiel $\varphi(r, \theta)$ obéit à l'équation de Laplace, en déduire l'équation différentielle en $g(\theta)$.

2/ a) En utilisant les conditions aux limites sur les parois P_1 et P_2, déterminer la loi $g(\theta)$. On posera $g_0 = g(0)$. On exploitera le fait que la vitesse orthoradiale du fluide ne peut s'annuler en dehors des plans P_1 et P_2.

b) On cherche une solution de la forme $f(r) = f_0 r^n$. Calculer n en fonction de α.

3/ a) Calculer le champ des vitesses du fluide et le module de cette vitesse en $M(r, \theta)$;

b) Calculer l'accélération du fluide en $M(r, \theta)$;

4/ Déterminer la fonction courant $\psi(r, \theta)$ définie par $d\psi = 0$ sur une ligne de courant, puis tracer les lignes de courant pour les deux cas particuliers

a) Dièdre droit ;

b) Dièdre à 45°.

On donne les opérateurs en coordonnées cylindriques :

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$