SERIE 3 : SOLUTIONS

EXERCICE 1

1. L'écoulement résultant a comme fonction potentiel : $\varphi = rV_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)cos\theta + K\theta$

Pourque l'écoulement dérive d'un potentiel il faut que $\boldsymbol{\Delta\varphi = 0}$. on peut le démontrer en exploitant le caractère incompressible de l'écoulement, ou bien calculer directement $\Delta\varphi$ en coordonnées cylindrique.

2.

$$\vec{V} = \left| \begin{array}{l} u_r = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} \\ u_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u_r = V_0\left(1-\dfrac{R^2}{r^2}\right)cos\theta \\ u_\theta = -V_0\left(1+\dfrac{R^2}{r^2}\right)sin\theta + \dfrac{K}{r} \end{array} \right.$$

3. La circulation Γ autour du cylindre se calcule par : $\Gamma = \oint \vec{V}\cdot\overrightarrow{dl}$

$$\overrightarrow{dl} = rd\theta\vec{e}_\theta \Rightarrow \Gamma = \int_0^{2\pi}\left[K - rV_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)sin\theta\right]d\theta = 2K\pi$$

4. Les points d'arrêt satisfont $\vec{V} = \vec{0}$ donc $\left| \begin{array}{l} u_r = 0 \\ u_\theta = 0 \end{array} \right.$

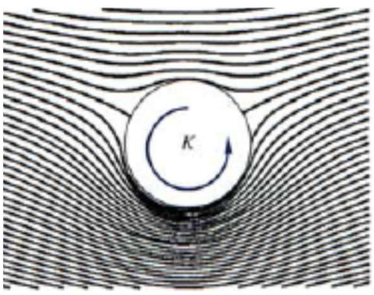
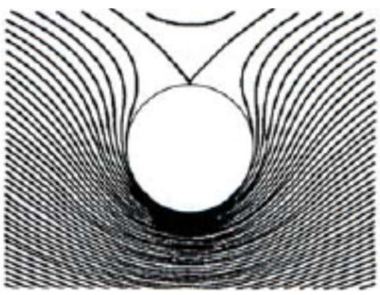
$$\left| \begin{array}{l} u_r = 0 \\ u_\theta = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} r = R \; ou \; \theta = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi \\ K - rV_0\left(1+\dfrac{R^2}{r^2}\right)sin\theta = 0 \end{array} \right.$$

On suppose que $K > 0$

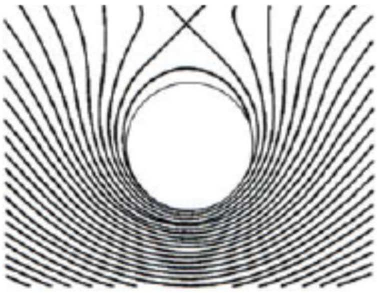
$$r = R$$

$\Rightarrow u_r = 0$ et $u_\theta = 0 = K - 2RV_0 sin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{K}{2RV_0} \Rightarrow sin\theta = \frac{\alpha}{2}$

Cette condition est valable si est seulement si : $\frac{\alpha}{2} \leq 1$

1er Cas : $\frac{\alpha}{2} < 1$ donc on aura deux points d'arrêt, de coordonnées (R, θ_0) et $(R, \pi - \theta_0)$ respectivement, avec $\theta_0 = Arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. 	2em cas : $\frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ un seul point d'arrêt $(R, \frac{\pi}{2})$ 

$r \neq R$



$$u_r = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u_\theta = 0 = K - rV_0\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$K - rV_0\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow r^2 - \alpha r R + R^2 = 0$$

Les racines de cette équation ne sont réelles que si $\alpha > 2$, on aura alors :

$$r_1 = \frac{\alpha R - R\sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}; \; r_2 = \frac{\alpha R + R\sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

On aura qu'un seul point d'arrêt dans ce cas : r_2. ($r_1 < R$ ce point se trouve à l'intérieur du cylindre, physiquement inacceptable).

Enfin, remarquons que si Γ<0 on aura les figures symétriques par rapport à l'axe *ox*

EXERCICE 2

1/ Le fluide est incompressible donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \Delta\varphi = 0$ donc le potentiel obéit à l'équation de Laplace, par conséquent il dérive d'un potentiel. (essayer de la démontrer aussi en calculant le laplacien en cordonnées cylindrique).

$$\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} f' g + g f'' + \frac{1}{r^2} f g'' = 0$$

$$f'' = \frac{d^2 f}{dr^2}; f' = \frac{df}{dr}; g'' = \frac{d^2 g}{d\theta^2}$$

D'où les équations différentielles :

$$\boxed{r^2 \frac{f''}{f} + r\frac{f'}{f} = -\frac{g''}{g} = cst \; (*)}$$

2/ a En posant $cst = \omega^2$: $g'' + \omega^2 g = 0 \; (**)$

La solution de (*) dépend du signe de ω^2

1er Cas : $\omega^2 = -\Omega^2 < 0$: $g(\theta) = Ae^{\Omega\theta} + Be^{-\Omega\theta}$

Le fluide ne peut pas s'écouler tangentiellement aux parois planes P_1 et P_2, donc pour $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$ $u_\theta = \frac{1}{r}\frac{dg}{d\theta} = 0 = \frac{\Omega}{r}\left(Ae^{\Omega\theta} - Be^{-\Omega\theta}\right)$

Pour $\theta = 0$ $u_\theta = 0 \Rightarrow A = B \Rightarrow$ $u_\theta = \frac{\Omega}{r} A\left(e^{\Omega\theta} - e^{-\Omega\theta}\right)$

Pour $\theta = \alpha$ $u_\theta = 0$ $\Rightarrow \frac{\Omega}{r} A\left(e^{\Omega\alpha} - e^{-\alpha\theta}\right) = 0 \Rightarrow A = 0$ innacceptable.

Donc le cas $\omega^2 < 0$ est impossible physiquement.

2em Cas : $\omega^2 > 0$: $g(\theta) = Acos(\omega\theta) + Bsin(\omega\theta)$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{dg}{d\theta} = \frac{\omega}{r}\left(-Asin(\omega\theta) + Bcos(\omega\theta)\right)$$

Pour $\theta = 0$ $u_\theta = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow$ $\quad u_\theta = -\frac{\omega}{r} A sin(\omega\theta)$

Pour $\theta = \alpha$ $u_\theta = 0$ $\quad\Rightarrow\quad A sin(\omega\alpha) = 0$. Donc $\omega = k\frac{\pi}{\alpha}$

$$g(\theta) = g_{à} cos\left(k\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)$$

b Avec $f(r) = f_0 r^n$ on a d'après (*)

$$\omega^2 = \frac{1}{r^n}(nr^n + n(n-1)r^n) = n^2$$

Donc $\quad n = \omega = k\frac{\pi}{\alpha}$

Le potentiel de vitesse est donc : $\varphi = f_0\, g_0\, r^{\left(k\frac{\pi}{\alpha}\right)} cos\left(k\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)$

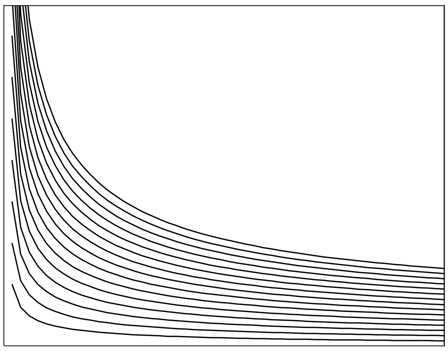
3/ a. Champ de vitesse $\vec{V} = \left| \begin{array}{l} u_r = k\frac{\pi}{\alpha} f_0\, g_0\, r^{\left(k\frac{\pi}{\alpha}-1\right)} cos\left(k\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) \\ u_\theta = -k\frac{\pi}{\alpha} f_0\, g_0\, r^{\left(k\frac{\pi}{\alpha}-1\right)} sin\left(k\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) \end{array} \right.$;

$$\boxed{\|\vec{V}\| = k\frac{\pi}{\alpha} f_0\, g_0\, r^{\left(k\frac{\pi}{\alpha}-1\right)}}$$

b. Régime permanent irrotationnel, donc le vecteur accélération : $\vec{\gamma} = (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(V^2)$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \left(\frac{k\pi}{\alpha} f_0 g_0\right)^2 \left(k\frac{\pi}{\alpha} - 1\right) r^{2\frac{k\pi}{\alpha}-3}\vec{e}_r}$$

$\boxed{4/}$ La résolution des équations : $\left| \begin{array}{l} u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta r} \end{array} \right.$ donne : $\boxed{\psi(r,\theta) = f_0\, g_0\, r^{\left(k\frac{\pi}{\alpha}\right)} sin\left(k\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)}$

a. Cas du dièdre droit : $\alpha = \pi/2$	b. Cas du dièdre à 45° : $\alpha = \pi/4$
$\psi(r,\theta) = f_0\, g_0\, r^2 sin(2\theta)$ Les lignes de courant ont donc pour équation : $r^2 sin(2\theta) = cte$ 	$\psi(r,\theta) = f_0\, g_0\, r^4 sin(4\theta)$ Les lignes de courant ont donc pour équation : $r^4 sin(4\theta) = cte.$