SOLUTIONS SERIE IV

EXERCICE 1

1/ Conservation de la masse : $S_AV_A = S_BV_B$ donc $D^2\ V_A=d^2\ V_B$

Bernoulli entre A et B : $\frac{1}{2}\rho_{eau}V_A^2 + P_A + \rho g h_A = \frac{1}{2}\rho_{eau}V_B^2 + P_B + \rho g h_B$ avec $h_A=h_B$

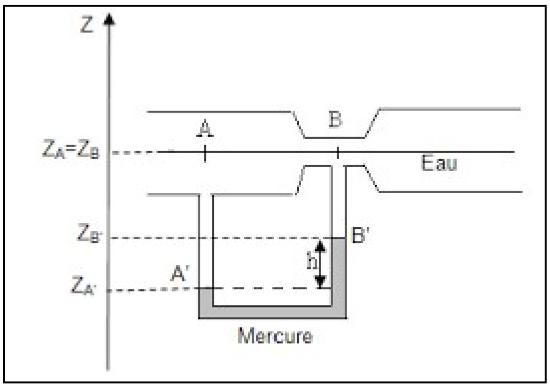
Donc $$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho_{eau}V_B^2 - \frac{1}{2}\rho_{eau}V_A^2 \Rightarrow P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho_{eau}V_A^2\left(\left(\frac{V_B^2}{V_A^2}\right)^2 - 1\right)$$

Finalement $$\boxed{P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho_{eau}V_A^2\left(\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right)} \quad (1)$$

$$D > d \Rightarrow \frac{D^4}{d^4} - 1 > 0 \text{ donc } P_A>P_B$$

Le niveau de mercure dans le tube en U est plus bas à gauche (côté A) qu'à droite (côté B).

2/ Les LDC sont rectilignes, la répartition des pressions est hydrostatique.



$$P_A - P_{A'}=\rho_{eau}\, g(h_{A'}-h_A)$$

$$P_{A'} - P_{B'}=\rho_{Hg}\, g(h_{B'}-h_{A'}) = \rho_{Hg}\, gh$$

$$P_{B'} - P_B=\rho_{eau}\, g(h_B-h_{B'})$$

En sommant les trois équations membre à membre on a :

$$P_A - P_B=\rho_{eau}\, g(h_{A'}-h_A+h_B-h_{B'})+ \rho_{Hg}\, gh= \boldsymbol{gh(\rho_{Hg}-\rho_{eau})} \ (2)$$

En comparant (1) et (2) on a :

$$\boxed{V_A = \sqrt{\frac{2gh\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{eau}} - 1\right)}{\frac{D^4}{d^4} - 1}}} \text{ or } \boxed{q_0 = V_AS_A = \sqrt{\frac{2gh\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{eau}} - 1\right)}{\frac{D^4}{d^4} - 1}} \times \frac{\pi D^2}{4}} \quad \boxed{V_B = V_A\left(\frac{D}{d}\right)^2}$$

AN : $V_A=0,11\ m/s$; $V_B=1\ m/s$; $q_0 = 0,71\times10^{-3} m^3/s = 0,71$ *litre/s*

EXERCICE 2

1/ Appliquons la relation de Bernoulli entre (1) et (2) :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 \Rightarrow P_1 - P_2 + \rho g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

Appliquons la loi de l'hydrostatique dans le tube :

$$P_A = P_1 + \rho g h_1 \; ; \; P_B = P_2 + \rho g h_2 \; ; \; P_A = P_B + \rho' g h$$

En remarquant en outre que : $h_1 - h_2 = h + (z_1 - z_2)$, on aboutit à la relation :

$$P_1 - P_2 = (\rho' - \rho) g h - \rho g (z_1 - z_2)$$

en plus de la relation de continuité : $S_1 v_1 = S_2 v_2$, on obtient alors :

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho) g h}{\rho\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right)}}}$$

Les deux autres vitesses se déduisent par l'application de la conservation du débit volumique :

$v_1 = 5{,}53\; m/s$	$v_2 = 8{,}65\; m/s$	$v_s = 15{,}37\; m/s$

2/ Et par conséquent le débit : $Q_v = S_i v_i \; (i = 1 \; ou \; 2 \; ou \; s) \Rightarrow Q_v = 68 \; l/s$.

3/ Appliquons le théorème de Bernoulli entre l'entrée et la sortie :

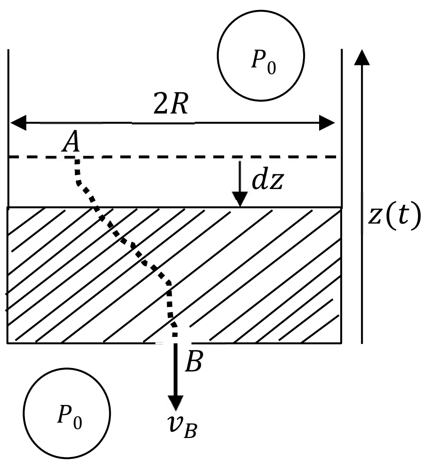
$$P_E + \rho g H = P_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 \; \Rightarrow H = \frac{v_s^2}{2g} = 11{,}8\; m$$

4/ $P_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 = P_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 \quad (v_3 = v_2)$

$$P_3 = P_{at} + \frac{1}{2}\rho(v_s^2 - v_3^2) \; \Rightarrow \; \boldsymbol{P_3 = 1{,}8\; bar}.$$

EXERCICE 3

1/ On applique le théorème de Bernoulli entre un point A de la surface libre, et le point de sortie B :



$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + z_A = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + z_B \quad (1)$$

Or : $v_A \approx 0;\; P_A = P_B = P_0\,;\; z_B = 0;\; z_A = z(t)$ donc (1) donne :

$$z(t) = \frac{v_B^2}{2g} \quad (2)$$

Pendant un laps de temps dt le débit volumique : $Q_v = s \times v_B = -\pi R^2 \frac{dz}{dt}$ (3)

A partir de (2) et (3), on aboutit à :

$$\boxed{\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{\sqrt{2g}}{\pi R^2} s dt \quad (4)}$$

2/ L'intégration de (4) avec la condition initiale à $t = 0$: $z = H/2$, donnent :

$$z(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{H} - \frac{\sqrt{g}}{\pi R^2} s \cdot t\right)^2 \ (5)$$

La durée t_c de vidange de ce réservoir correspondra à $z(t) = 0$, donc :

$$\boxed{t_c = \frac{\pi R^2}{\sqrt{g s}} \sqrt{H}}$$

AN : $t_c = 1760\ s \approx 30\ min$

(5) peut être réécrite sous la forme

$$z(t) = \frac{H}{2}\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^2 \ (6)$$

3/ La hauteur correspondante à t'_c est $H/4$, et donc par substitution de ces paramètres en (6) on aboutira à :

$$\boxed{t'_c = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) t_c}$$

AN : $t_c = 515 s \approx 9\ min.$

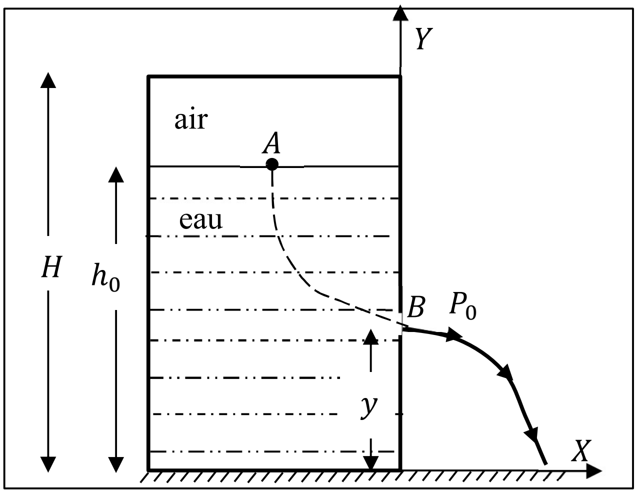
EXERCICE 4

1/ On applique Bernoulli entre A et B :

$$\frac{P_{ini}}{\rho g} + h_0 = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_0}{\rho g} + y$$

$$\boxed{v_B = v_0 = \sqrt{\frac{P_0}{5\rho} + 2g(h_0 - y)}}$$

AN : $v_0 = 6{,}93\ m/s.$



2/ a- Transformation isotherme (Loi de Mariotte) :

$$PV = cst$$

$$P_{ini}(H-h_0)(\pi R^2) = P_1(H-h_1)(\pi R^2)$$

$$h_1 = \frac{22h_0 - H}{21} \quad (1)$$

b- On applique Bernoulli entre A et B :

$$\frac{P_1}{\rho g} + h_1 = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_0}{\rho g} + y \quad (2)$$

$$(1)\text{dans } (2) \Rightarrow \; v_B = v_1 = \sqrt{\frac{P_0}{10\rho} + 2g\left(\frac{22h_0 - H}{21} - y\right)}$$

AN : $v_1 = 6{,}11\, m/s$ *

3/ a-

$$\left.\begin{array}{l} P_{ini}(H-h_0) = P(H-h) \\ \dfrac{P}{\rho g} + h = \underbrace{\dfrac{v_B^2}{2g}}_{0} + \dfrac{P_0}{\rho g} + y \end{array}\right\} \Rightarrow \; h^2 - \left[\frac{P_0}{\rho g} + (H+y)\right]h + \left[\frac{P_0 H}{\rho g} + yH - \frac{P_{ini}}{\rho g}(H-h_0)\right]$$

b- AN : on trouve deux racines à cette équation, la solution acceptable $(h < h_0)$ est donc :

$$h = \frac{1}{2}\left(12{,}9 - \sqrt{93{,}2}\right) = 1{,}62\; m.$$

* $v_1 < v_0$ plus le temp passe plus la vitesse d'injection diminue jusqu'à un certain temps où la vitesse s'annule