Energie et puissance des signaux

Introduction

Toute transmission de signal (ou d'information) est liée à une transmission d'énergie. C'est pourquoi l'étude des propriétés des signaux impose d'étudier leur énergie : c'est le but de ce chapitre.

I-Energie des signaux

Par définition, l'énergie totale E_s (exprimée en Joule) d'un signal $s(t)$ à temps continu est:

$$\mathbf{E}_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{s(t)s^*(t)\,dt}$$

- $s^*(t)$ est le conjugué complexe du signal $s(t)$.
- Si $s(t)$ est un signal réel : $s^*(t) = s(t)$ et l'énergie se réduit à :

$$\mathbf{E}_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,\mathbf{dt}$$

- Si E_s est finie, on parle de <u>signaux à énergie finie</u>.

Remarque :

- Tous les signaux de durée limitée (c.à.d. à support borné) sont des signaux à énergie finie.

II- Puissance des signaux

II-1. Puissance instantanée

- Par définition, la puissance instantanée d'un signal $s(t)$ est :

$$p_s(t) = s(t)\,s^*(t) = |s(t)|^2$$

Où $s^*(t)$ est le conjugué du signal $s(t)$.

- On définit, si elle existe, **<u>la puissance moyenne totale</u>** d'un signal s(t) par :

$$P_s = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s(t)s^*(t)\, dt$$

- Si la limite est finie, on parle de <u>signaux à puissance moyenne finie.</u>

II-2 Puissance des signaux périodiques

- La puissance moyenne d'un signal s(t) périodique de période T_0correspond à la puissance moyenne du signal s(t) sur une période T_0:

$$P_s = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t)s^*(t)\, dt$$

- P s'exprime en Watts (Joule par seconde).

Exemple :

Calculer la puissance moyenne du signal réel et sinusoïdal représenté par la fonction : **$s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$.**

$$P_s = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \frac{A^2}{2} T_0$$

Remarques:

- **Un signal d'énergie finie ($E_s < \infty$) a une puissance moyenne nulle.**
- **Un signal d'énergie $E_s = 0$ est considéré comme un signal nul (égal 0)**
- **2 signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont égaux si l''énergie de leur différence est nulle.**

$$\int [s_1(t) - s_2(t)]^2\, dt = 0$$

- **Tous les signaux physiques sont à énergie finie mais on les modélise mathématiquement comme des signaux éternels dont on observe une certaine durée.**

Signaux nuls	$E = 0$	
Signaux à énergie finie	$E < \infty$ $P = 0$	signaux de module fini et de support borné
Signaux à puissance moyenne finie	$E = \infty$ $P < \infty$	signaux périodiques
Autres signaux	$E = \infty$ $P = \infty$	$s(t) = t$, bruit blanc, dirac

III- Energie et puissance d'interaction des signaux

III-1 Energie d'interaction de deux signaux

L'énergie d'interaction de deux signaux s_1 (t) et s_2(t) est définie par :

$$\mathbf{E_{s1s2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{s_1(t)s_2^*\ \ (t)\ dt}$$

$$|\mathbf{E_{s1s2}}|^2 \leq \mathbf{E_{S1}E_{S2}}$$

Exemple :

Prenons comme exemple 2 sources ponctuelles s_1 et s_2 produisant en un point de l'espace une onde s_1(t) et s_2(t). Lorsque ces 2 sources agissent simultanément, l'onde en ce point est s(t) = s_1(t) + s_2(t). Si on veut calculer l'énergie de s(t), on obtient alors :

$$\mathbf{E_s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{s(t)}s^*\ \ \mathbf{(t)\ dt}$$

$$\mathbf{E_s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{s_1(t)s_1^*\ \ (t)\ dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{s_2(t)s_2^*\ \ (t)\ dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{s_1(t)s_2^*\ \ (t)\ dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{s_2(t)s_1^*\ \ (t)\ dt}$$

Donc $\mathbf{E_s = E_1 + E_2 + E_{12} + E_{21}}$

- L'énergie totale est égale à l'énergie de chacune des 2 ondes plus des termes croisés relatifs à l'interaction des 2signaux.

III-2 Puissance d'interaction de deux signaux

Définition

La puissance instantanée d'interaction de 2 signaux $\mathbf{s_1(t)}$ et $\mathbf{s_2(t)}$ est définie par:

$$\mathbf{P_{S1S2}(t) = s_1(t) \cdot s_2^*(t)}$$

Remarque : $\mathbf{P_{S2S1}(t) = P^*_{S1S2}(t)}$

IV-Fonction d'autocorrélation des signaux

La corrélation est une mesure énergétique de la similitude de forme et de position entre deux signaux.

Elle trouve l'application dans la synchronisation de systèmes, la détection et la reconnaissance de signaux noyés dans le bruit, le filtrage adapté, etc.

IV-1 Fonction d'autocorrélation d'un signal à énergie finie

Définition :

Pour les signaux à énergie finie, on définit la fonction d'autocorrélation $\mathbf{C_{ss}}$ $(\boldsymbol{\tau})$d'un signal **s(t)** par :

$$\mathbf{C_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) s^*(t - \tau)\, dt}$$

- L'autocorrélation est la corrélation du signal s(t) et lui-même.

IV-2 Fonction d'autocorrélation d'un signal à puissance moyenne finie

Définition

La fonction d'autocorrélation $\boldsymbol{C_{ss}(\tau)}$d'un signal **s(t)**<u>à puissance moyenne finie</u> est définie par :

$$C_{ss}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) s^* \quad (t - \tau)\, dt$$

IV-3 Fonction d'autocorrélation d'un signal périodique

Définition

On définit la fonction d'autocorrélation $C_{ss}(\tau)$ d'un signal **s(t)** périodique de période T_0 par :

$$C_{ss}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{\frac{-T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) s^* \quad (t - \tau)\, dt$$

- La fonction d'autocorrélation traduit la similitude d'un signal au niveau de la forme en fonction d'un décalage temporel. C'est une mesure de la ressemblance du signal avec lui-même au cours du temps.
- Dans le cas d'un signal périodique, la fonction d'autocorrélation le sera aussi et permettra de détecter cette périodicité.

IV-4. Propriétés de la fonction d'autocorrélation

- La fonction d'autocorrélation d'un signal s(t) est maximum en 0 et correspond à l'énergie du signal :

$$C_{ss}(\tau) \leq C_{ss}(0) = Es \quad \forall \tau$$

- Dans le cas où s(t) est un signal réel, la fonction d'autocorrélation est paire : $C_{ss}(\tau) = C_{ss}(-\tau)$
- Dans le cas où s(t) est un signal complexe, la fonction d'autocorrélation est à symétrie hermitienne :

$$C_{ss}(\tau) = C_{ss}^*(-\tau)$$

- **$C_{ss}(\tau)$ et $C_{s1s2}(\tau)$** sont homogènes à une énergie (Energie croisée entre un signal et un autre signal retardé) ou à une puissance pour le deuxième cas.

- Si $C_{s_1 s_2}(\tau) = 0$, signifie que les signaux sont totalement **décorrélés** (c.à.d. orthogonaux).
- $|C_{s_1 s_2}(\tau)|^2 \leq C_{s_1 s_1}(\tau) \,.\, C_{s_2 s_2}(\tau)$ (**Inégalité de Schwartz**)

IV-5 Fonction d'intercorrélation des signaux

IV-5.1 Fonction d'intercorrélation des signaux à énergie finie

Définition

On définit la Fonction d'intercorrélation $C_{S1S2}(\tau)$de deux signaux **s_1(t)** et **s_2(t)** à énergie finie par :

$$C_{S1S2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^{*}\ (t - \tau)\, dt$$

IV-5.2 Fonction d'intercorrélation des signaux à puissance moyenne finie

Définition

On définit la fonction d'intercorrélation $C_{s1s2}(\tau)$ de deux signaux **s_1(t)** et **s2(t)** à puissance moyenne finie par :

$$C_{s1s2}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s_1(t) s_2^{*}\ (t - \tau)\, dt$$

- Puisque $C_{s1s2}(\tau)$ est une mesure de similitude, elle atteint son maximum pour une valeur de τ lorsque la similitude est la plus grande.

V- Densité spectrale d’énergie et densité spectrale de puissance

V-1 Définition

La densité spectrale d’un signal s(t) notée $\Gamma_{ss}(f)$ est définie comme étant la transformée de Fourier (TF) de la fonction d'autocorrélation $C_{ss}(\tau)$ du signal s(t)

$$\begin{aligned} \Gamma_{ss}(f) &= TF\ [C_{ss}(\tau)] \\ &= S(f)\,.\,S^*(f) \\ &= |S(f)|^2 \end{aligned}$$

En effet : on a :

$$C_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s^*(t-\tau)\,dt$$

On pose : x(t) = s(t) et y(t) = s*(- t),

alors $C_{ss}(\tau) = \mathbf{x}(\tau) * \mathbf{y}(\tau)$

Théorème de Wiener-Khinchine

Enoncé :

La densité spectrale $\Gamma_{ss}(f)$ d'un signal **s(t)** est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $C_{ss}(\tau)$.

On écrit cette propriété sous la forme :

$$\Gamma_{ss}(f) = TF\,[C_{ss}(\tau)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{ss}(\tau)\ \exp(-j\,2\pi f\tau)\,d\tau$$

$$= S(f)\ .\ S^*(f)$$

$$= |S(f)|^2$$

Avec $$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\exp(-j\,2\pi f t)\,dt$$

$$= TF\,(s(t))$$

et $$C_{ss}(t) = TF^{-1}\,[\Gamma_{ss}(f)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{ss}(f)\exp(j\,2\pi f t)\,df$$

VI - Densité inter-spectrale

On définit la densité inter-spectrale de deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ notée $\Gamma_{s_1 s_2}(f)$ comme étant la transformée de Fourier (TF) de la fonction d'intercorrélation $C_{s_1 s_2}(\tau)$ des deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

On a alors :

$$\Gamma_{S_1S_2}(f) = TF\,[\,C_{S_1S_2}(\tau)]$$

$$= S_1(f)\;.\;S_2^*(f)$$

*** Si $s_1(t) = s_2(t)$**

alors $\Gamma_{ss}(f) = TF\,[\,C_{ss}(\tau)\,]$

$$= S(f)\;.\;S^*(f)$$

$$= |S(f)|^2$$

- **Γ_{ss} (f)** est la densité spectrale d''énergie du signal s(t). Son intégrale donne l'énergie totale du signal.

Remarque

- On retrouve ainsi le théorème de Parseval :
- L'énergie d'un signal s(t) dans la représentation temporelle est égale à son énergie dans la représentation fréquentielle.

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |\,s(t)|^2\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\,S(f)|^2\,df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma ss\,(f)\,df$$

$$= C_{ss}\,(0)$$

Exercice d'application (TD 2)

I- On considère le signal $s_1(t)$ définit par :

$$\mathbf{s_1(t) \;=\; S_0 \exp(-\, w_0 t)}$$

1- Montrer que $s_1(t)$ est périodique et de période T_0.

2- Calculer la fonction d'autocorrélation $C_{s1s1}(\tau)$ du signal $s_1(t)$

3- Montrer que $C_{s1s1}(\tau)$ est périodique.

4- Montrer que $|C_{s1s1}(\tau)| \leq \cdot\, C_{s1s1}(0)$ (la fonction d'autocorrélation est maximum en 0)

5- Vérifier les propriétés de la fonction d'autocorrélation suivantes :

a- $C_{s1s1}(0)$ = Puissance moyenne,

b- $C_{s1s1}(\tau) = C^*_{s1s1}(-\tau)$: symétrie hermitienne,

II- Cette fois-ci, on considère le signal $s_2(t)$ définit par :

$$s_2(t) \;=\; s_0\, e^{-\,at} u(t)$$

avec a > 0 et u(t) le signal échelon unité (ou signal Heaviside)

1. Représenter sur le même graphe l'allure de s_2(t et de $s_2(t - t_0)$.

2. Montrer que la fonction d'autocorrélation **:**

$$C_{s2s2}(\tau) = \frac{S_0^2}{2a} e^{-\,at}$$

3. Vérifier les propriétés de la fonction d'autocorrélation

a- $C_{s2s2}(0)$ = Puissance moyenne,

b- $C_{s2s2}(\tau) = C^*_{s2s2}(-\tau)$: symétrie hermitienne,

c- $|C_{s2s2}(\tau)| \leq \cdot\, C_{s2s2}(0)$

III- Calculer la fonction d'autocorrélation du signal porte $\Pi_\theta(t)$. Vérifier les propriétés de la fonction d'autocorrélation.

2.5 Exercices : Autocorrélation

Soit la fonction $x(t) = S_0\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}$

1. Montrer que cette fonction est périodique de période T_0 $(x(t+T_0) = x(t))$.
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$.
3. Vérifier les propriétés de la fonction d'autocorrélation suivantes :
   (a) $C_{xx}(0)$ =Puissance moyenne,
   (b) $C_{xx}(\tau) = C^*_{xx}(-\tau)$: symétrie hermitienne,
   (c) $|C_{xx}| \leq C_{xx}(0)$: la fonction est maximum en 0,
   (d) comme $x(t)$ est périodique alors $C_{xx}(\tau)$ est périodique.

Soit la fonction $x(t) = S_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,u(t)$
avec $\alpha > 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et 0 ailleurs

1. Représenter sur le même graphe l'allure de $x(t)$ et de $x(t-t_0)$.
2. Montrer que la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$ est

$$C_{xx}(\tau) = \frac{S_0^2}{2\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha\tau}$$

3. Vérifier les propriétés de la fonction d'autocorrélation (3a), (3b), (3c)
4. Mêmes questions pour la fonction porte $\Pi_\theta(t)$.