

Echantillonnage, numérisation et restitution des signaux

I- Introduction

Les systèmes numériques de traitement de l'information ne cessent de se développer et deviennent de plus en plus importants (radio, télévision, téléphone, instrumentation...). Leur choix est souvent justifié par des avantages techniques telles que la grande stabilité des paramètres, l'excellente reproductibilité des résultats et des fonctionnalités accrues. Le monde extérieur étant par nature "analogique", une opération préliminaire de conversion analogique-numérique est alors nécessaire. Cette conversion analogique-numérique est la succession de trois effets sur le signal analogique de départ :

- * l'échantillonnage pour rendre le signal discret;
- * la quantification pour associer à chaque échantillon une valeur;
- * le codage pour associer un code à chaque valeur.

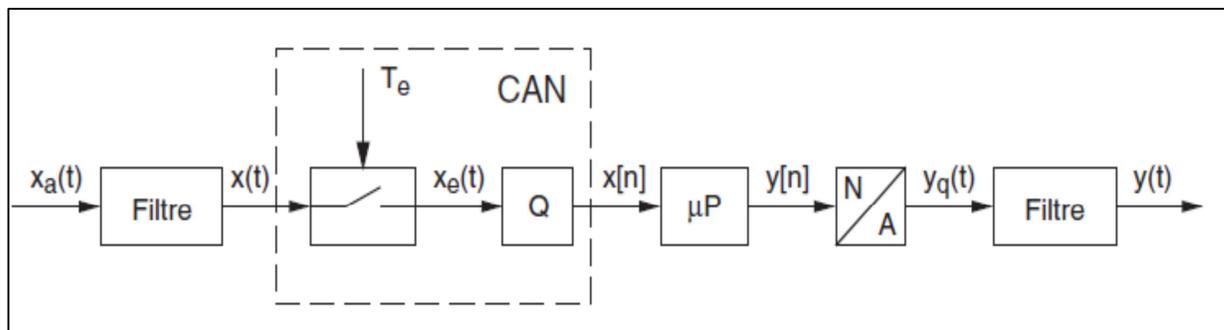


Figure 1 : Détail de transformation d'un signal à travers une chaîne de conversion analogique-numérique

La figure présente les éléments qui interviennent lors du traitement numérique d'un signal analogique. On y trouve un filtre anti-repliement (dit aussi anti-recouvrement), un échantillonneur commandé par une horloge de période T_e , un quantificateur Q, un processeur numérique μP , un convertisseur N/A et un filtre de lissage.

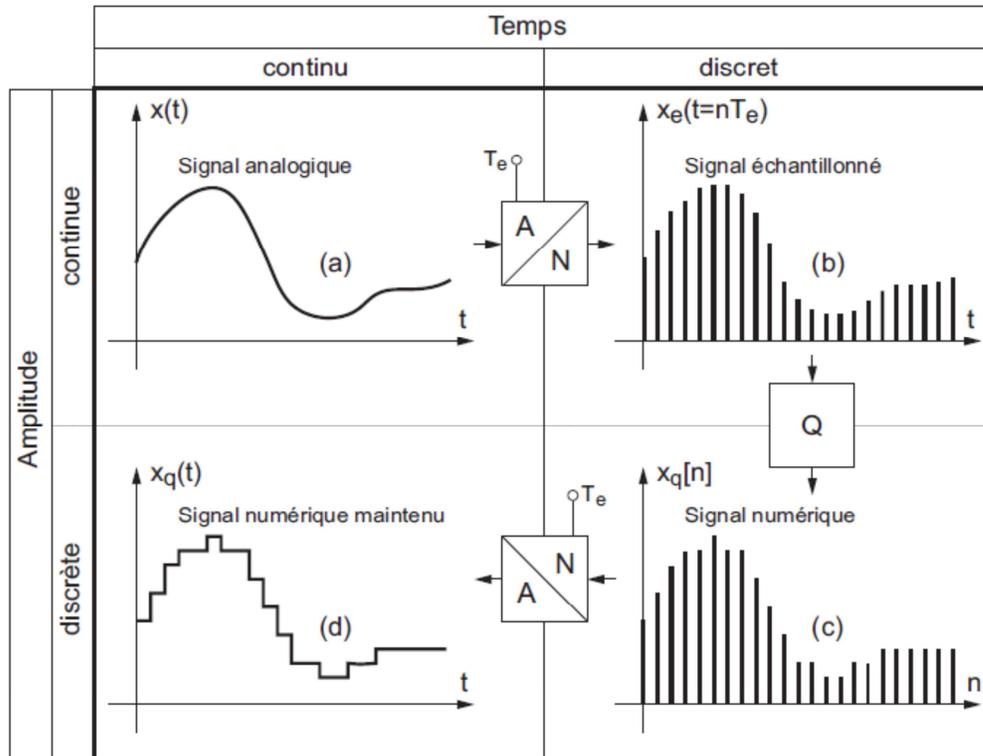


Figure 2: Différents types de signaux obtenus en différents points de la chaîne de numérisation

II- Définition de l'échantillonnage d'un signal

L'échantillonnage d'un signal analogique $s(t)$ consiste à prélever régulièrement tous les T_e secondes, qui est la **période d'échantillonnage**, les valeurs instantanées du signal $s(nT_e)$ avec n un entier relatif. $s(nT_e)$ est la valeur du signal échantillonné à l'instant nT_e . La fréquence $F_e = 1/T_e$ est appelée **fréquence d'échantillonnage** du signal $s(t)$.

Le signal analogique $s(t)$, continu dans le temps, est alors représenté par un ensemble de valeurs discrètes : $s_e(n) = s(nT_e)$; avec n un entier relatif.

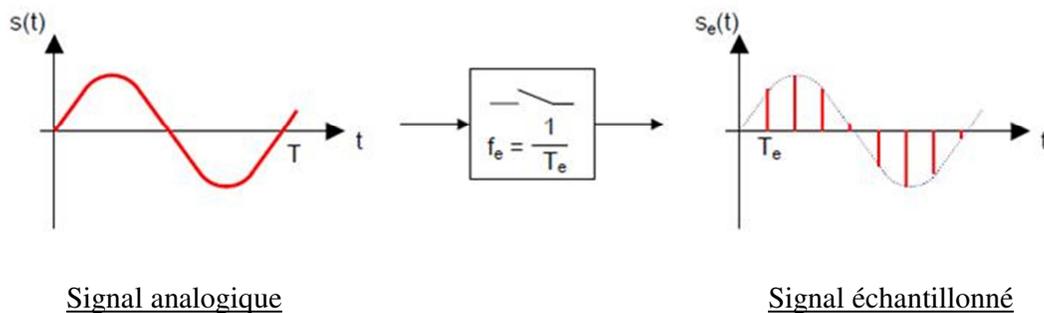


Figure 3: Représentation de l'échantillonnage d'un signal analogique

- L'opération d'échantillonnage d'un **signal analogique** (signal continu en temps et en amplitude) est réalisée par **un échantillonneur** souvent symbolisé par **un interrupteur**.
- **La quantification** est l'opération qui permet de passer des valeurs continues en amplitude à des valeurs discrètes.
- Un **signal échantillonné quantifié** s'appelle un **signal numérique**.
- Un **convertisseur A/N** (Analogique/Numérique) réalise l'échantillonnage et la quantification d'un signal analogique.
- pour **reconstituer le signal analogique sans perte d'information** à partir de ses échantillons, des conditions sur la période d'échantillonnage à respecter seront précisées (théorème de Schannon).
- **La perte d'information** est d'autant plus faible que **la quantification est fine**.
- **L'erreur de quantification** est modélisée comme **un bruit aléatoire**,

$$s(nT_e) = s_q(nT_e) + e(nT_e)$$

III- Types d'échantillonnage

III-1. Echantillonnage idéal (ou parfait)

III-1.1. Définition

- **L'échantillonnage idéal** est réalisé par la **multiplication** du signal analogique $s(t)$ par **le peigne de Dirac** $\text{III}_{T_e}(t)$, c'est à dire, une suite d'impulsions de Dirac séparés par T_e de **poinds 1** qui multiplie le signal de spectre de bande $[-B; B]$.
- Le **signal échantillonné** $s_e(t)$ est donc défini par :

$$s_e(t) = s(t) \cdot \text{III}_{T_e}(t)$$

avec $\text{III}_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$: le peigne de Dirac de période T_e

$$s_e(t) = s(t) \cdot \text{III}_{T_e}(t)$$

$$= s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - nT_e)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)$$

$s(nT_e)$ valeur prise par le signal $s(t)$ à l'instant (nT_e) avec n un entier relatif. On dit que le signal est discrétisé.

III-1.2. Spectre du signal échantillonné

On rappelle que le peigne de Dirac de période T_e dans l'espace temporel :

$$\text{III}_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

a pour transformée de Fourier le peigne de Dirac dans l'espace fréquentiel de période $1/T_e$ que multiplie l'inverse de la période dans l'espace temporel c.à.d. :

$$\begin{aligned} \text{TF} [\text{III}_{T_e}(t)] &= \text{TF} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \right] \\ &= F_e \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e) \right] \end{aligned}$$

Avec $F_e = \frac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage qui est égale l'inverse de la période d'échantillonnage T_e .

- Le spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné $s_e(t)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} S_e(f) &= \text{TF} [s_e(t)] \\ &= \text{TF} [s(t) \cdot \text{III}_{T_e}(t)] \\ &= \text{TF} [s(t)] * \text{TF} [\text{III}_{T_e}(t)] \\ &= S(f) * F_e \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e) \right] \\ &= F_e \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e) \right] \end{aligned}$$

- L'opérateur $*$ désigne le produit de convolution

Conséquences

- Le spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné $s_e(t)$ s'obtient en périodisant dans l'espace fréquentiel avec une période $F_e = 1/T_e$ le spectre $S(f)$ du signal $s(t)$.

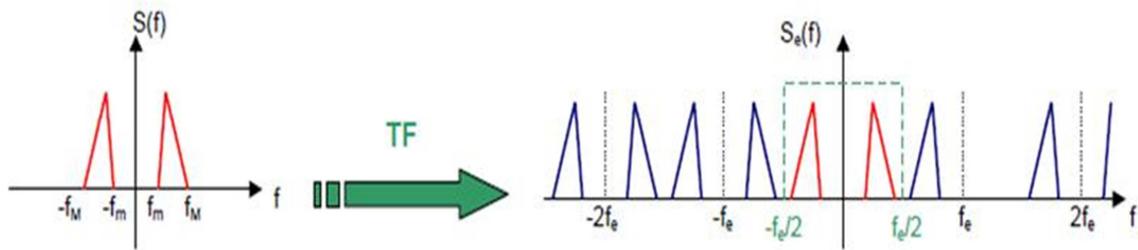


Figure 4

- **Echantillonner** dans le temps revient à **périodiser dans l'espace des fréquences**.
- **Problème de reconstruction ou restitution** du signal lorsque $F_e < 2F_{max}$, dans ce cas; il y a **repliement des spectres; on dit aussi recouvrement spectral ou "aliasing"**
: on dit qu'on est en **sous-échantillonnage du signal**.

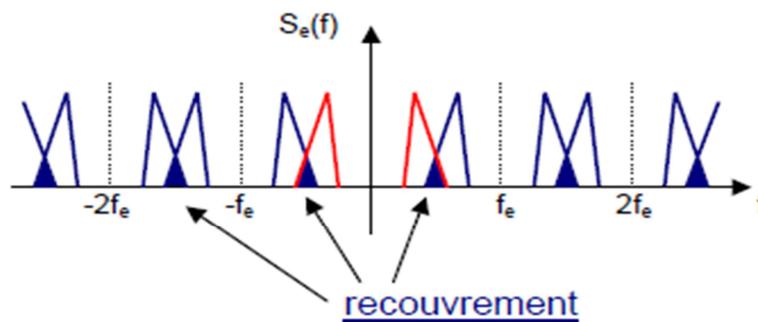


Figure 5

- On ne peut plus **reconstruire S(f)** à partir de **S_e(f)** et donc **s(t)** à partir de **s(nT_e)**.
- Dans le cas où $f_e \geq 2F_{max}$, pour obtenir **S(f)** à partir de **S_e(f)**, il suffit de filtrer par un filtre passe bas idéal de réponse en fréquences **H(f)**:

$$H(f) = T_e \cdot \Pi_{F_e}(f)$$

$$\text{Soit } h(t) = \text{sinc}(F_e t)$$

Exemples :

- **Cas de la parole** : le spectre des sons audibles s'étend jusqu'à environ 20 kHz. Dans le cas **des CD audio**, le signal est échantillonné à **44.1 kHz** alors que dans le cas du téléphone *numérique* le signal est échantillonné à **8 kHz** seulement.

En effet, en téléphonie, on estime que le message est compréhensible pourvu que les composantes basses fréquences soient transmises correctement alors que l'on veut conserver toutes les harmoniques pour avoir un son de qualité en audio. On limite ainsi le spectre à **22.05 kHz** pour un CD audio et à **4 kHz** pour la téléphonie (3.4 kHz en pratique).

- Si $F_e \gg 2.F_{max}$, il y a **sur-échantillonnage**: alors les motifs successifs obtenus par périodisation du spectre sont disjoints et éloignés l'un de l'autre. Le filtrage passe-bas pour la récupération du signal est facilité; plus on prendra d'échantillons par période, plus le signal sera facile à reconstruire.

III-1.3. Théorème d'échantillonnage (ou de Shannon)

- **Tout signal $s(t)$ d'énergie finie et de spectre à support borné sur $[-F_{max}, F_{max}]$ (signal en bande de base) peut être échantillonné toutes les périodes T_e sans perte d'information à condition que la fréquence d'échantillonnage F_e soit supérieure au double de la fréquence maximale du spectre du signal $s(t)$: $F_e = \frac{1}{T_e} \geq 2.F_{max}$**

- Sans perte d'information signifie qu'on peut reconstruire $s(t) \forall$ l'instant t , à partir de la suite infinie des échantillons $s(nT_e)$.

- La fréquence minimale d'échantillonnage $F_e = 2.F_{max}$ s'appelle la **fréquence de Nyquist**.

- **$H(f)$ correspond à la réponse en fréquence du filtre passe - bas idéal.**

- Il est possible de retrouver le spectre du signal continu $S(f)$ à partir de celui du signal échantillonné $S_e(f)$ en utilisant par exemple un signal porte (**fenêtre rectangulaire**) de type $\Pi_{2F_{max}}$ c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} S_e(f) \cdot \Pi_{2F_{max}} &= F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e) \cdot \Pi_{2F_{max}} \\ &= \frac{1}{T_e} \cdot S(f) \end{aligned}$$

et on retrouve ainsi le signal $s(t)$ par transformée de Fourier inverse du spectre $S(f)$ du signal.

Interpolation de Shannon:

Si $h(t) = \text{sinc}(F_e t)$

$$\begin{aligned}
y(t) &= s_e(t) * h(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \delta(t - nT_e) * \text{sinc}(F_e t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \text{sinc}[F_e(t - nT_e)]
\end{aligned}$$

Cette dernière équation correspond à la formule d'interpolation de Shannon.

III-2. Echantillonnage réel

En pratique, l'échantillonnage s'effectue en commandant un interrupteur par un train d'impulsions étroites. Il est donc impossible d'obtenir des échantillons de durée quasiment nulle. La modélisation de l'échantillonnage par un peigne de Dirac est donc erronée. En fait, chaque impulsion va avoir une durée très courte τ . L'échantillonnage peut donc être modélisé par la multiplication du signal par une suite de fonction rectangle (ou porte) de largeur **τ** et de période **T_e** noté : $i_{T_e, \tau}(t)$,:

$$i_{T_e, \tau}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi_{\tau}(t - nT_e) = \pi_{\tau}(t) * \text{III}_{T_e}(t)$$

- Mais l'amplitude des impulsions sera en fonction du procédé d'échantillonnage utilisé:
- Echantillonnage naturel: l'amplitude égal à $s(t)$ pendant la durée τ .
 - Echantillonnage régulier: l'amplitude constante et égale à $s(nT_e)$;
 - Echantillonnage moyenneur: l'amplitude égal à la moyenne de $s(t)$ sur l'intervalle τ

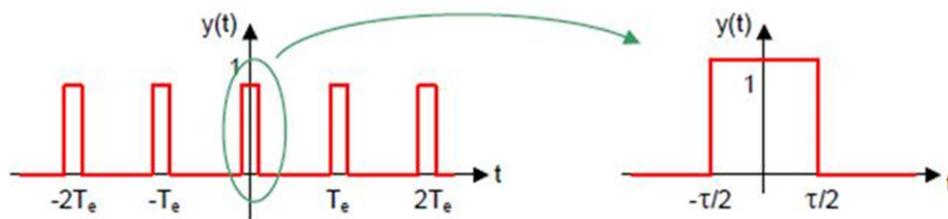


Figure 6

III-2.1. Echantillonnage naturel

- L'expression du signal échantillonné $s_e(t)$ dans ce cas est :

$$s_e(t) = s(t) \cdot i_{T_e, \tau}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi_{\tau}(t - nT_e) \\
&= s(t) \cdot [\pi_{\tau}(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)]
\end{aligned}$$

- **Le spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné $s_e(t)$ est :**

$$\begin{aligned}
S_e(f) &= \text{TF}(s_e(t)) \\
&= \text{TF}[s(t) \cdot i_{T_e, \tau}(t)] \\
&= \text{TF}[s(t)] * \text{TF}[i_{T_e, \tau}(t)] \\
&= S(f) * \text{TF}[i_{T_e, \tau}(t)] \\
&= S(f) * \text{TF}[\pi_{\tau}(t) * \text{III}_{T_e}(t)] \\
&= S(f) * \text{TF}[\pi_{\tau}(t)] \cdot \text{TF}[\text{III}_{T_e}(t)] \\
&= S(f) * \tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \cdot F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e) \\
&= S(f) * \tau \cdot F_e \cdot [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(nF_e\tau) \cdot \delta(f - nF_e)] \\
&= \tau \cdot F_e \cdot [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(nF_e\tau) [S(f) * \delta(f - nF_e)]] \\
&= \tau \cdot F_e \cdot [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(nF_e\tau) [S(f - nF_e)]]
\end{aligned}$$

III-2.2. Echantillonnage-bloqueur de durée τ (ou régulier)

C'est le cas d'échantillonnage le plus pratique. L'amplitude de chaque impulsion est constante et égale à l'amplitude du signal initial au temps nT_e c.à.d. $s(nT_e)$.

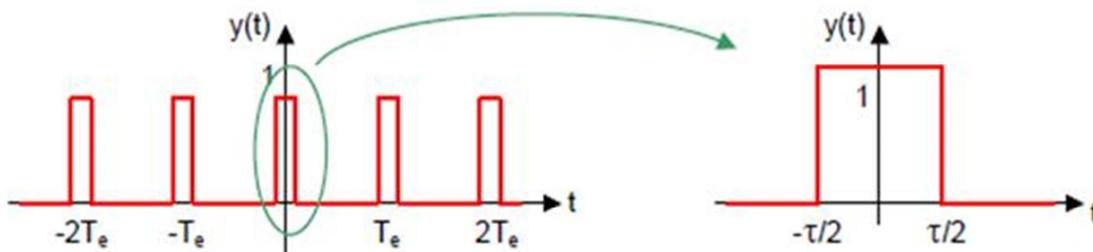


Figure 7

- L'expression du signal échantillonné $s_e(t)$ dans ce cas est :

$$\begin{aligned}
 s_e(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \pi_{\tau}(t - nT_e) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) * \pi_{\tau}(t) \\
 &= s(t) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \right] * \pi_{\tau}(t)
 \end{aligned}$$

- Le spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné $s_e(t)$ est donc :

$$\begin{aligned}
 S_e(f) &= S(f) * \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_e \cdot \delta(f - nF_e) \right] \cdot [\tau \cdot \text{sinc}(f\tau)] \\
 &= \tau \cdot F_e \cdot \text{sinc}(f\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nF_e)
 \end{aligned}$$

- Pour retrouver le spectre $S(f)$, on filtre par un filtre passe bas idéal de largeur F_e et il faut multiplier par l'inverse d'un sinus cardinal (fonction sinc) si on veut compenser et retrouver $S(f)$.
- On retrouve la même allure de spectre modulé en amplitude par une fonction en sinus cardinal.

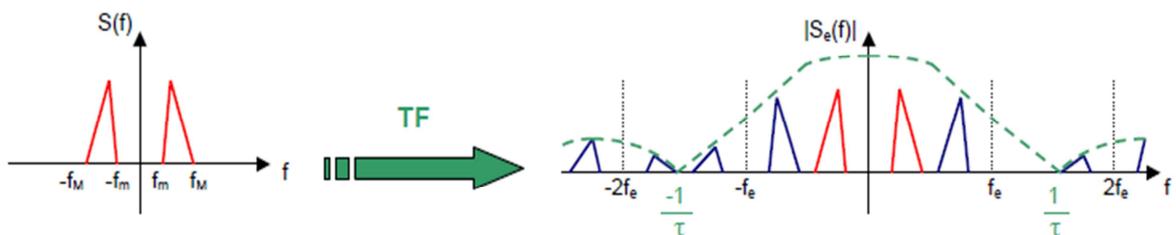
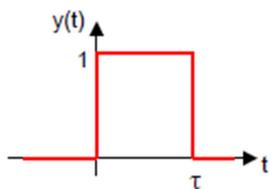


Figure 8

Remarques :

- Pour se rapprocher d'un échantillonnage idéal et qu'ainsi le signal soit facilement reconstituable, il faut que T soit le plus petit possible.
- Dans le cas où T est du même ordre de grandeur que F_e , il faudra $F_e \gg 2 F_{\max}$.

- En pratique, on n'échantillonne pas un signal pour le reconstruire juste après. L'échantillonnage est utilisé pour prélever le signal à des instants multiples de T_e et ensuite convertir les échantillons sous forme d'un code binaire (8, 12, 16 bits, ...). Cette conversion est effectuée par l'intermédiaire d'un convertisseur analogique-numérique (CAN). Cette conversion n'est pas instantanée. Si le signal à convertir varie trop rapidement, il est nécessaire de procéder au blocage du signal pour avoir une conversion sans erreur. On utilise donc un échantillonneur-bloqueur qui mémorise la tension à convertir et la maintient constante pendant toute la durée de conversion.
- **L'effet de blocage peut être modélisé par une fonction porte décalée de $T/2$**



$$y(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - \frac{\tau}{2} - kT_e}{\tau} \right) = \text{rect} \left(\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau} \right) * \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

- L'échantillonnage-blocage consiste donc à la multiplication du signal par $y(t)$.
- La transformée de Fourier du signal échantillonné est donc dans ce cas:

$$S_e(f) = \frac{\tau}{T_e} \text{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f - k f_e) \cdot e^{-j\pi f \tau}$$

- Le spectre est identique au précédent. Le terme en **$\exp(-j\pi f \tau)$** traduit un déphasage entre le signal initial et le signal échantillonné.
- En principe, on maintient la valeur de l'échantillon sur toute la période d'échantillonnage donc $T = T_e$. Ainsi, pour $f = F_e$, on a un déphasage de $-\pi$.

III-2.3. Echantillonnage moyenneur

L'échantillonneur moyenneur donne des échantillons $s_e(nT_e)$ qui correspondent à la valeur moyenne du signal $s(t)$ prise sur la durée τ . Ainsi, l'expression de l'échantillon n est :

$$s_e(nT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{nT_e - \frac{\tau}{2}}^{nT_e + \frac{\tau}{2}} s(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\tau} \cdot \int_{nT_e - \frac{\tau}{2}}^{nT_e + \frac{\tau}{2}} \pi_{\tau}(t - nT_e) \cdot s(t) dt \\
&= \frac{1}{\tau} \cdot [\pi_{\tau}(t) * s(t)] \cdot \delta(t - nT_e)
\end{aligned}$$

- Le signal échantillonné $s_e(t)$ est exprimé par suite par :

$$s_e(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\pi_{\tau}(t) * s(t)] \cdot \delta(t - nT_e)$$

- Le spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné $s_e(t)$ est alors :

$$\begin{aligned}
S_e(f) &= \text{TF}(s_e(t)) \\
&= \text{TF}\left(\frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\pi_{\tau}(t) * s(t)] \cdot \delta(t - nT_e)\right) \\
&= \frac{1}{\tau} \cdot F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ([\tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \cdot S(f)] * \delta(f - nF_e)) \\
&= F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(\tau(f - nF_e)) \cdot S(f - nF_e)]
\end{aligned}$$

Après un filtre passe-bas de largeur F_e , la relation liant le spectre de base du signal échantillonné et celui du signal $S(f)$ est pour $n=0$ on a alors :

$$S_{e0}(f) = F_e \cdot \text{sinc}(f\tau) \cdot S(f)$$

IV- Filtre anti-repliement

- Pour de nombreux signaux physiques, $S(f)$ n'est pas connu parfaitement. De plus, il existe toujours un bruit de fond additionnel dû au milieu de mesure (capteur, circuit d'amplification). Donc, il faut effectuer un filtrage passe-bas appelé pré-filtrage du signal avant son échantillonnage pour supprimer tout repliement spectral.
- Si l'on désire observer le spectre d'un signal jusqu'à la fréquence F_{\max} , il est souhaitable de prendre une fréquence d'échantillonnage $F_e = n F_{\max}$ avec $n \geq 2$.
- Un signal de TF à support borné a un support temporel infini donc on a besoin de tous les échantillons de kT_e de $-\infty$ à $+\infty$ afin de reconstruire le signal $s(t)$. On ne peut pas reconstruire en temps réel, il faudra le faire de façon approchée.

Exemple:

- En pratique pour transmettre la parole par téléphone, on filtre entre [300Hz; 3400Hz], on échantillonne à 8000 Hz et on quantifie sur 8 bits / échantillons; ce qui correspond à 64000 b/s.
- Pour un disque compact avec du son stéréo, on filtre entre 0 et 20 kHz et on échantillonne à 44,1 kHz.

V- Interpolation par le bloqueur d'ordre 0

Le problème est de reconstituer $s(t)$ à partir de ses échantillons $s(kT_e)$. Une réalisation possible est le bloqueur d'ordre 0. La reconstitution à l'aide d'un bloqueur d'ordre 0 est la plus employée car elle est réalisée par les convertisseurs N/A à l'entrée desquels les valeurs numériques sont maintenues pendant la période d'échantillonnage.

VI- Quantification

VI-1. Définition

La quantification consiste à associer à une valeur réelle x quelconque, une autre valeur x_q appartenant à un ensemble fini de valeurs et ce suivant une certaine loi : arrondi supérieur, arrondi le plus proche, etc...

L'écart entre chaque valeur x_q est appelé **pas de quantification**.

Le fait d'arrondir la valeur de départ entraîne forcément une **erreur de quantification** que l'on appelle le **bruit de quantification**.

VI-2. Quantification uniforme

La loi de quantification uniforme utilise un pas de quantification (Δ) constant entre chaque valeur x_q .

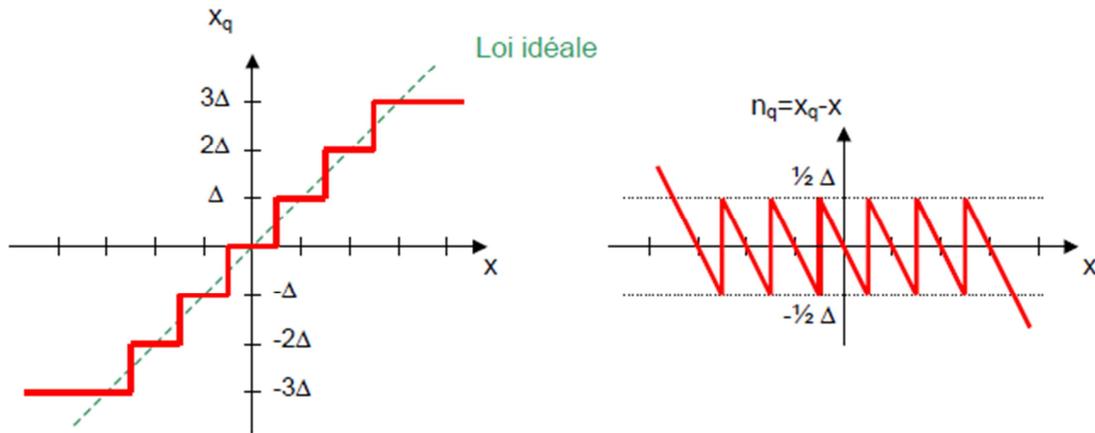


Figure 9

- Le bruit de quantification n_q est dans ce cas un **signal aléatoire**. Ces caractéristiques sont donc définies par ses **propriétés statistiques**. On peut alors démontrer que la puissance du bruit de quantification est égale à :

$$P_{n_q} = \frac{\Delta^2}{12} \quad (\text{si sa densité de probabilité est uniforme})$$

- Le rapport signal sur bruit dû à la quantification est donc égale à :

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{dB}} = 10 \log \frac{P_S}{P_{n_q}}$$

- La puissance du signal à quantifier est égale à sa valeur efficace au carré (voir remarque) :

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{dB}} = 10 \log \left[12 \left(\frac{V_{\text{seff}}}{\Delta} \right)^2 \right]$$

Si l'on décompose la plage de variation V_{PE} du signal à quantifier en 2^n intervalles de largeur Δ (avec nle nombre de bits utilisés pour coder le signal quantifié).

Alors $V_{PE} = 2^n \times \Delta$ et $\Delta = \frac{V_{PE}}{2^n}$

Ainsi :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log 12 + 20 \log \left(2^n \frac{V_{seff}}{V_{PE}}\right) = 10 \log 12 + 20 \log 2^n + 20 \log \left(\frac{V_{seff}}{V_{PE}}\right)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx 6.02n + 10.8 + 20 \log \left(\frac{V_{seff}}{V_{PE}}\right)$$

Ainsi, dans le cas d'un convertisseur analogique-numérique, chaque fois que l'on rajoutera un bit dans le résultat de conversion, on améliorera le rapport signal sur bruit dû à la quantification d'environ 6dB.

Remarque :

En traitement du signal, on considère la puissance d'un signal aux bornes d'une résistance de 1Ω . La puissance est donc égale au carré de la valeur efficace.

Exemple :

Si l'on veut numériser une sinusoïde et que l'on fixe $V_{PE} = 2.V_{max}$

Dans ce cas, $V_{seff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$ et $\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx 6.02n + 10.8 + 20 \log \left(\frac{V_{max}}{2\sqrt{2} V_{max}}\right)$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx 6.02n + 1.77$$

VI-3 Codage

Le codage consiste à associer à un ensemble de valeurs discrètes un code composé d'éléments binaires.

Les codes les plus connus : code binaire naturel, code binaire décalé, code complément à 2, code DCB, code Gray.

Exemple sur 4 bits :

Nbre	Binaire	Binaire décalé	DCB	Gray	Complément à 2
-8	/	0000	/	/	1000
-3	/	0101	/	/	1101
0	0000	1000	0000	0000	0000
1	0001	0001	0001	0001	0001
5	0101	0101	0101	0111	0101
10	1010	/	0001 0000	1111	/
15	1111	/	0001 0101	1000	/

Annexe 1 : Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$\delta_T(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

La décomposition en série de Fourier donne :

$$\text{SdF}[\delta_T(t)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn2\pi f_n t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn2\pi \frac{t}{T_0}} \quad \text{avec} \quad S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-jn2\pi f_n t} dt$$

$$\text{d'où } S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \cdot e^{-jn2\pi f_n t} dt$$

sur $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \right]$, $\delta_T(t) = 1$ pour $t = 0$ et 0 ailleurs.

$$\text{donc } S_n = \frac{1}{T_0} e^{-jn2\pi f_n t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0}$$

donc la décomposition en série de Fourier du peigne de Dirac vaut :

$$\text{SdF}[\delta_T(t)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{jn2\pi f_n t} = \frac{1}{T_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{jn2\pi f_n t}$$

Comme $\text{TF}[e^{-2j\pi f_0 t}] = \delta(f + f_0)$:

$$\text{TF}[\delta_T(t)] = \frac{1}{T_0} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac (en temps) est un peigne de Dirac (en fréquence).

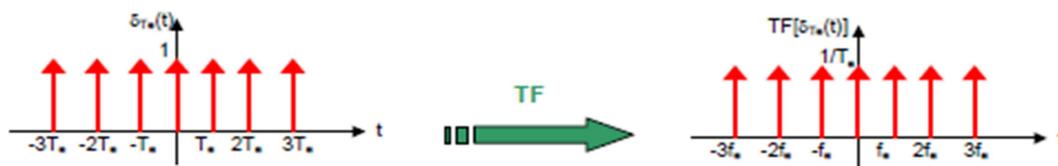


Figure 7