Signaux déterministes à temps discret

Introduction

Les signaux à temps discret peuvent être considérés comme des suites de nombres x(k) ∈ C avec k ∈ Z. Ils sont issus généralement de l'échantillonnage à la fréquence F_e = 1/ Te de signaux temporels x(t) analogiques et les nombres x(k) représentent les échantillons x(kTe).

I- Signaux à temps discret élémentaires

1- Impulsion unité

$$\begin{cases} \delta(k) & = & 1 & \text{si } k = 0 \\ & = & 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Attention δ(k) ne doit pas être confondu avec la distribution de Dirac δ(t).

2- L'échelon unité

$$\begin{cases} u(k) & = & 1 & \text{si } k \geq 0 \\ & = & 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

3- La porte de longueur N

$$\begin{cases} \Pi_N(k) & = & 1 & \text{si } 0 \leq k \leq N/2 - 1 \\ & = & 0 & \text{si } k \geq N/2 \end{cases}$$

II- Propriétés des signaux à temps discret

1- Périodicité

Un signal x(k) est périodique de période N ∈ N* si N est le plus petit entier tel que :

$$x(k) = x(k + N) \quad \forall k$$

2- Energie :

On définit l'énergie d'un signal x(k) par:

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2$$

3- Puissance moyenne

- On définit la puissance moyenne d'un signal discret x(k) par :

$$P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} |x(k)|^2$$

- Signaux à énergie finie si on a : $0 < Ex < \infty$ alors $Px = 0$
- Signaux à puissance moyenne finie si on a : $0 < Px < \infty$ alors $Ex = \infty$

4- Fonction d'autocorrélation d'un signal x(k)

- **Pour un signal à énergie finie :**

$$C_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) x^*(k-\tau)$$

- **Pour un signal à puissance moyenne finie :**

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x(k) x^*(k-\tau)$$

- **Pour un signal périodique**

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-T_0/2}^{+T_0/2} x(k) x^*(k-\tau)$$

5- Fonction d'inter-corrélation de deux signaux discrets x(k) et y(k)

- **Pour un signal à énergie finie**

$$C_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y^*(k-\tau)$$

- **Pour un signal à puissance moyenne finie**

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N/2}^{+N/2} x(k)y^*(k-\tau)$$

6- Produit de convolution

$$y(k) = x(k) * h(k) = h(k) * x(k) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} h(u)x(k-u) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x(u)h(k-u)$$

III- Transformée de Fourier des signaux à temps discret

1 Définition

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, \mathrm{e}^{-j2\pi kf}$$

$$X(f+1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, \mathrm{e}^{-j2\pi k(f+1)}$$

$$X(f+1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, \mathrm{e}^{-j2\pi kf} = X(f)$$

- Donc X(f) est périodique de période 1.
- Les x(k) sont les coefficients de la série de Fourier de X(f) de période 1,

$$x(k) = \frac{1}{1} \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, \mathrm{e}^{j2\pi kf}\, df$$

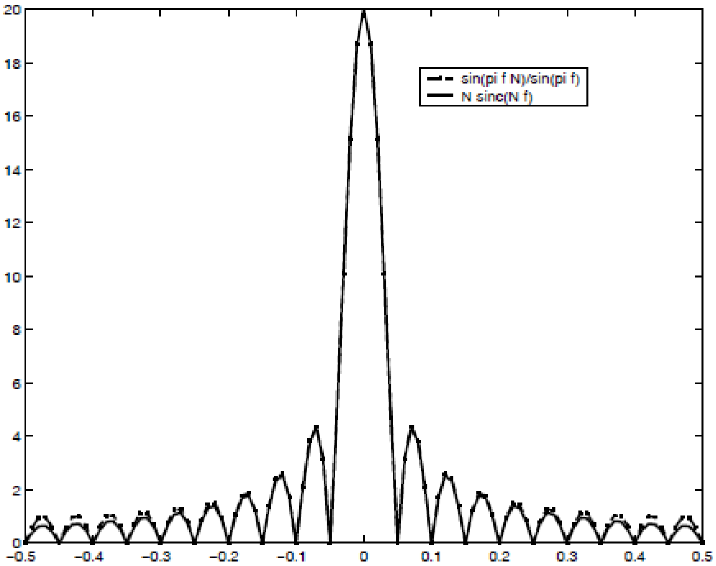
- L'intervalle [-1/2 , 1/2] est appelé<u>intervalle principal</u>.
- Le spectre X(f) du signal à temps discret x(k) est à la fréquence continue et de

période F0 = 1.

Exemple

Calcul de la TF de $x(k) = \Pi_N(k)$,

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,\mathrm{e}^{-j2\pi kf} \\
X(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-j2\pi kf} \\
X(f) &= \frac{1-\mathrm{e}^{-j2pifN}}{1-\mathrm{e}^{-j2\pi f}} \\
X(f) &= \mathrm{e}^{-j\pi f(N-1)}\,\frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi f)}
\end{aligned}
$$



IV- Propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité	$Z[ax(k)+by(k)]$	$=$	$aX(z)+bY(z)$
Théorème de la modulation	$\mathrm{TF}[x(k)\,\mathrm{e}^{j2\pi f_0 k}]$	$=$	$X(f-f_0)$
Relation de Parseval	$E_x=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lvert x(k)\rvert^2$	$=$	$\int_{-1/2}^{1/2}\lvert X(f)\rvert^2 df$
TF d'un produit	$\mathrm{TF}[x(k)y(k)]$	$=$	$\int_{-1/2}^{1/2} X(f')Y(f-f')df'$
		$=$	$X(f)*Y(f)$

V- Transformée de Fourier discrète d'un signal discret

La TF d'un signal discret ex(k) est définie par :

$$
X(f)=X(\mathrm{e}^{j2\pi f})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,\mathrm{e}^{-j2\pi kf}
$$

X(f) est périodique de période 1. De plus, la TF inverse donne

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{j2\pi fk}\, df$$

Inconvénients :

f varie de façon continue, on ne peut donc pas l'implanter sur un calculateur numérique. Il faut une infinie de x(k). En pratique on peut :

1. prendre un nombre fini N d'échantillons x(k) choisis de façon à conserver les valeursimportantes du signal k = 0; à ;N - 1,

$$\widetilde{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi kf}$$

2. et discrétiser la fréquence f sur [0,1[. On choisit Δ = 1/N, c'est µa dire fn = n/N pourn = 0; ….. ;N - 1.

$$\hat{X}(\frac{n}{N}) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \;\text{ avec } n = 0, \ldots, N-1$$

On obtient ainsi N valeurs :

$$\hat{X}(0), \hat{X}(1/N), \ldots, \hat{X}(N-1/N)$$

correspondant à la transformée de Fourier discrète (TFD).

Par définition la TFD est une application linéaire qui à *N* valeurs complexes (*x*(0)*;* ;*x*(*N -1*)) associe *N* valeurs complexes (*X*0*; : : : ;XN* - 1) et on note :

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \;\text{ avec } n = 0, \ldots, N-1$$

La suite *Xn* est une suite périodique de période*N*.

La TFD inverse donne :

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \, \mathrm{e}^{j2\pi k \frac{n}{N}} \text{ avec } k = 0, \ldots, N-1$$

Remarques

- La TFD représente les valeurs échantillonnées de la TF d'un signal discret de duréefinie, x_0;…..; x(N - 1).
- Si x(k) n'est pas de durée finie, on a les valeurs échantillonnées de la TF du signaldiscret x(k) Π_N (k), Π_N (k) étant le fenêtre rectangulaire de longueur N. Ceci entrainedes oscillations dans la TF et l'utilisation de fenêtres de pondération g(k) pour les faire disparaitre (Hamming, Hanning).
- La TFD ne représente les valeurs échantillonnées de la TF d'un signal à temps continu

x(t) que si x(t) est à durée limitée [0;NTe] et si sa TF X(f) à un spectre à bande limitée[-1/2Te ; 1/2Te]. Comme il n'existe pas de signaux à durée et à bande limitée, oncommet une erreur systématique en considérant les Xn comme des échantillons de laTF X(f) .

Exemple

On cherche à déterminer la TFD *Xn* du signal *x*(*k*)

$$x(k) = A \cos(2\pi \frac{f_0}{f_e} k)$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \, \mathrm{e}^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \text{ avec } n = 0, \ldots, N-1$$

Signal réel : le module du spectre est une fonction paire

Signal échantillonnée *:*le module du spectre est une fonction périodique (*fe*)

TFD *:*fréquences discrètes

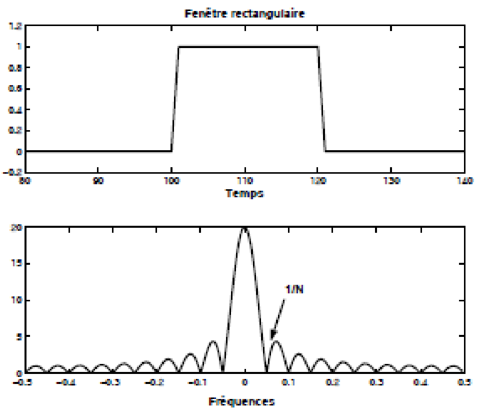
Signal à support borné

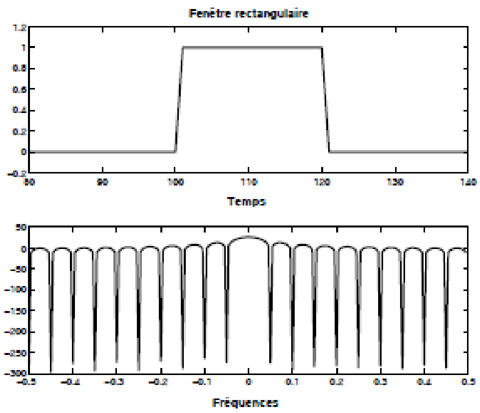
multiplication en temps=convolution en fréquence

Fenêtres de pondération

Nous allons dans ce paragraphe, d'écrire plusieurs fenêtres de pondération, en montrer lesavantages et leur limites.

Bien que ce ne soit pas une règle générale, dans ce paragraphe, les fenêtresétudiées serontplacées symétriquement autour de l'origine pour simplifier les calculs. Les résultatsétablisdans ce cas pourront être modifies aisément pour d'autres positions à l'aide du théorème duretard.





Module de la transformée de Fourier   Module de la transformée de Fourier en dB

2.6.1 Fenêtre rectangulaire

La manière brutale de limiter la durée d'un signal est de le multiplier par un signal rectangulaire (fonction Porte), possédant N échantillons unités. Au niveau spectral cette multiplication revient à convoluer la TF de x(t) par la TF de la fonction porte. Cette opération de convolution a pour effet d'introduire des ondulations dans le spectre.

En règle générale la résolution en fréquence sera d'autant meilleure que :

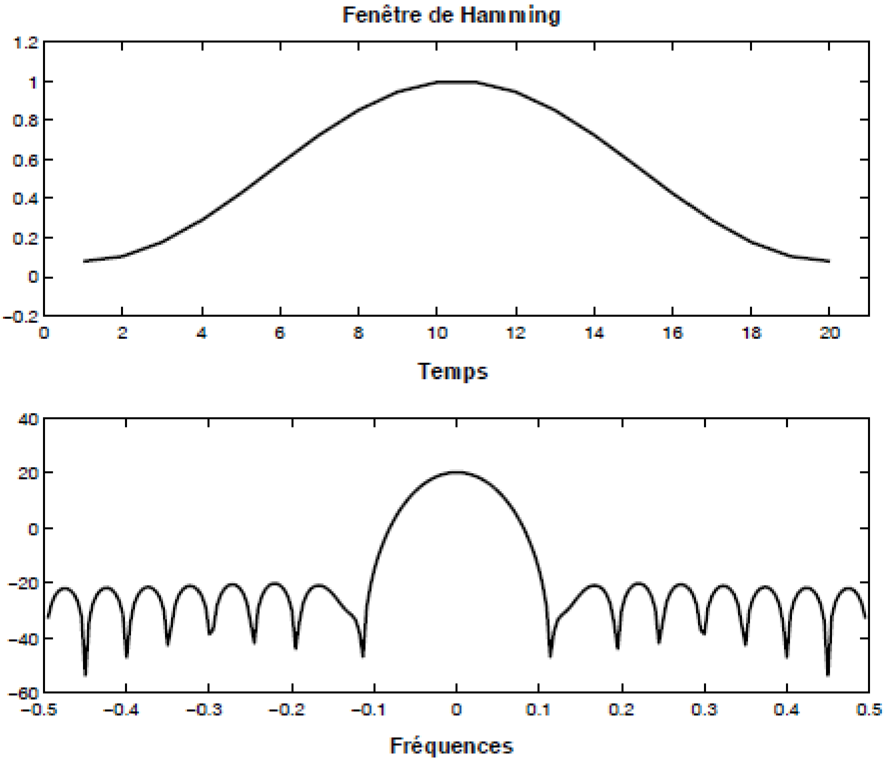
- le lobe principale (central) est étroit,
- les lobes secondaires (latéraux) sont bas.

Malheureusement la réduction en hauteur des lobes secondaires s'accompagne toujours de l'élargissement du lobe principal. Il faut donc accepter un compromis entre ces deux effets.

2.6.2 Fenêtre de Hamming

L'équation de la fenêtre de Hamming est donne par la relation suivante pour α = 0:54 :

$$\begin{cases} w(k) & = \alpha + (1-\alpha)\cos(2\pi k/N)) \quad \text{pour } |k| \geq N/2 \\ & = 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$



Remarque

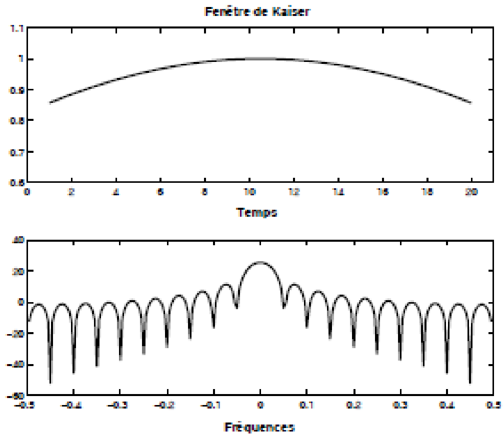
La fenêtre de Hanning est obtenue pour α 1=2 dans l'équation 2.1.

2.6.3 Fenêtre de Kaiser

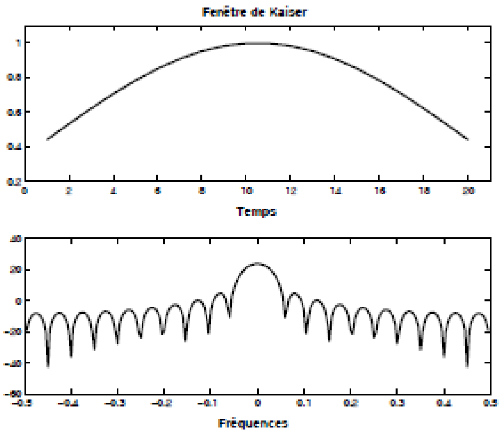
Une autre famille de fonctions fenêtre a été proposée par Kaiser. Elle permet selon la valeurd'un paramètre *B*, de spécifier dans le domaine des fréquences le compromis entre la largeurde lobe principal et l'amplitude des lobes secondaires. Une caractéristique importante decette famille de raffinée de fenêtres est qu'il est possible d'obtenir de fortes atténuationsdes lobes secondaires tout en conservant une largeur minimale pour le pic central. La formegénérale de cette fonction est la suivante :

$$
\begin{cases}
w(k) & = \dfrac{I_0\left[\beta\sqrt{N^2-4k^2}\right]}{I_0(\beta N)} \quad \text{pour } |k| \geq N/2 \\
 & = 0 \quad \text{ailleurs}
\end{cases}
$$

Où I_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéros et où *B* caractérise l'échange d'énergie entre le pic central et les lobes secondaires. La largeur du pic central augmenteavec *B*.



$\beta = 0.8$



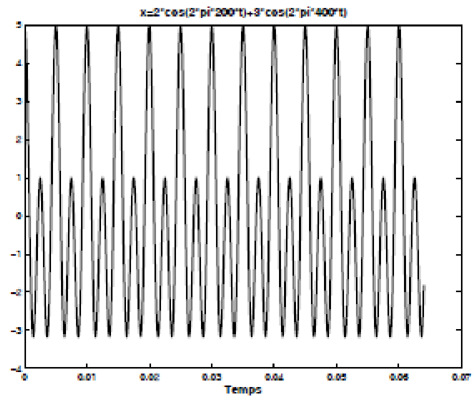
$\beta = 2$

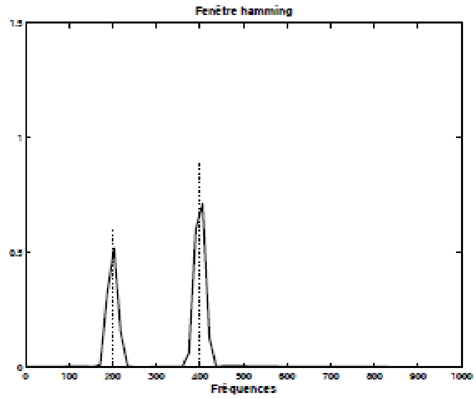
2.6.4 Exemple

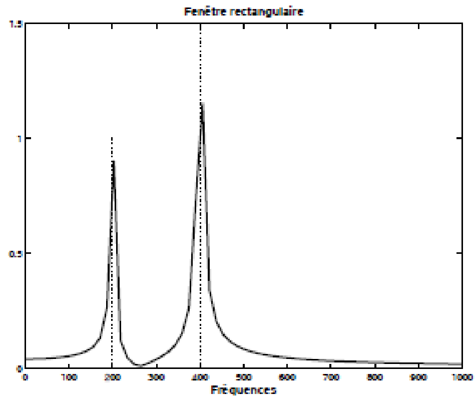
On génère un signal composé de deux sinusoïdes de fréquence 200 et 400 Hz, échantillonnéà 8000 Hz et ayant 512 points. On calcule la TF de ce signal après multiplication parune fenêtre rectangulaire, de Hamming et de Kaiser. la résolution en fréquence est donc
fe / N = 16Hz.

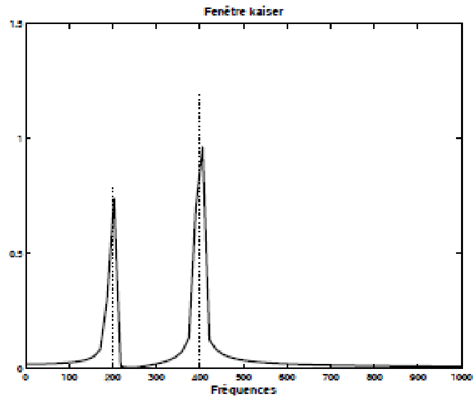
2.7 La transformée de Fourier rapide

La transformée de Fourier rapide ou FFT (Fast Fourier Transform) est une technique decalcul rapide de la TFD. L'algorithme de base, utilise un nombre de points $N = 2^p$et songain en temps par rapport àun calcul direct est de l'ordre de $N / log_2(N)$. Pour N = 1024,la FFT est donc environ 100 fois plus rapide.


x=2*cos(2*pi*200*t)+3*cos(2*pi*400*t)
Temps


Fenêtre hamming
Fréquences


Fenêtre rectangulaire
Fréquences


Fenêtre kaiser
Fréquences