Signaux et processus aléatoires

I. Notion de fonction aléatoire:

I-1 Définition:

Un phénomène (ou processus) est dit aléatoire (ou stochastique) lorsqu'il dépend d'une certaine manière des lois du hasard. Son évolution dans le temps est imprévisible et on ne peut faire que des statistiques sur le signal.

Un signal aléatoire observé peut être considéré comme une représentation particulière (une réalisation du processus: courbes b et c) d'un ensemble de signaux similaires (réalisations) qui sont tous susceptibles d'être produits par le même processus aléatoire (courbes a)

Un processus aléatoire scalaire est donc une famille de variables aléatoires indexées par le temps $[x(t, \omega)]$, $t \in T$ et $\omega \in \Omega$ où T est la durée (ou intervalle) d'observation du processus et Ω l'espace d'état.

En réalité toute grandeur physique est entachée de bruit.

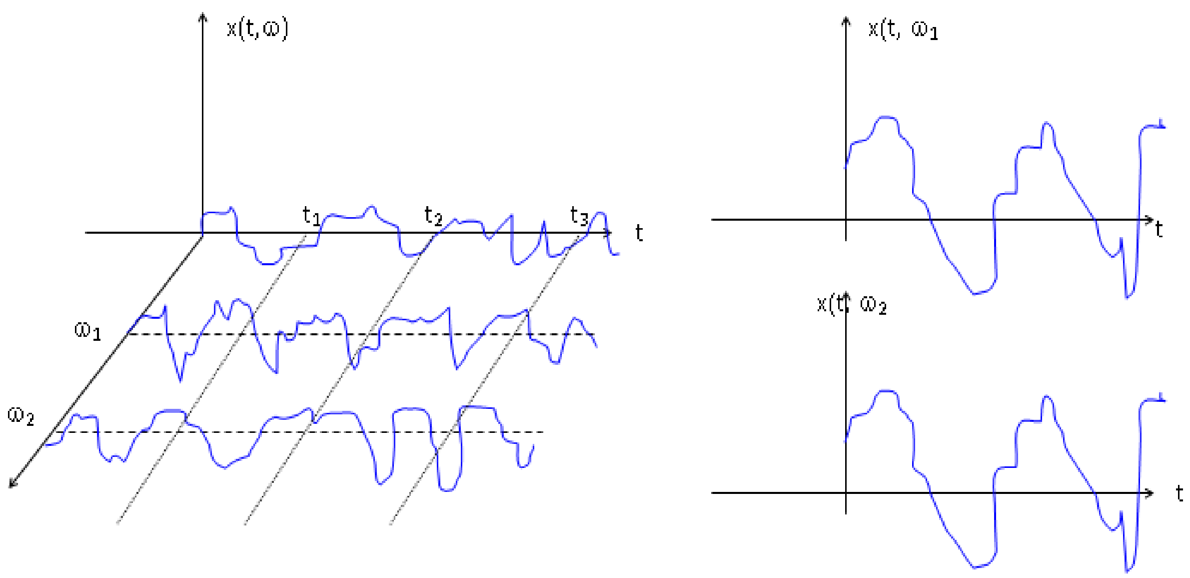


Figure 1

1. Pour ω fixé, $x(t, \omega)$ est une réalisation du processus et elle seule c'est une fonction non aléatoire.
2. Si Ω est discret, le processus est à espace d'état discret.
3. Pour t fixé et pour $\omega \in\{\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots\ldots, \omega_n\}$ on obtient n valeurs prises par la v.a $X(t)=\{X_1(t), X_2(t), \ldots\ldots\ldots, X_n(t)\}$; $X_i(t)=x(t, \omega_i)$. Donc l'étude du processus peut se ramener à l'étude de vecteur $(X_1(t), X_2(t), \ldots\ldots\ldots, X_n(t))$; Cette approximation est d'autant plus précise que n est grand ($n\to\propto$).

I. 2. Exemples:

- Mesure de bruit thermique dans une résistance
- Echocardiogramme d'un ensemble de passions souffrant de la même maladie.

II- Caractéristiques statistiques

On est ainsi en présence d'un processus aléatoire discret, c'est à dire d'un système de n v.a $\{X_1(t), X_2(t), \ldots\ldots\ldots, X_n(t)\}$ pour lequel on peut définir (pour décrire le processus):

II-1 La fonction de répartition:

- **Elle dépend en général du temps :** $F(x, t) = \text{Prob}\,[\, x\,(t, \omega) \leq x(t)\,]$; fonction de répartition du premier ordre notée aussi $F(x_t)$.

- Si on considère deux instants t_1 et t_2 :

$\mathbf{F(x_{t1}, x_{t2}) = Prob\,[x(t_1, \omega) \leq x_{t1}\ et\ x(t_2, \omega) \leq x_{t2})]}$; fonction de répartition du deuxième ordre.

- Statistique d'ordre n: D'une manière générale on peut définir la fonction de répartition pour toutes les variables $\mathbf{X(t_1, \omega), x(t_2, \omega), \ldots\ldots\ldots, x(t_n, \omega)}$ par :

$\mathbf{F(x_{t1},\ldots\ldots, x_{tn}) = Prob\,[x(t_1, \omega) \leq x_{t1}\ ,\quad\ , et\ x(t_n, \omega) \leq x_{tn})]}$.

II-2 La densité de probabilité (ddp):

- La densité de probabilité est définie par:

$f(x_{t1}) = \dfrac{dF(x_{t1})}{dx_{t1}}$ et $f(x_{t1}, x_{t2}) = \dfrac{\partial^2 F(x_{t1}, x_{t2})}{\partial x_{t1} \partial x_{t2}}$ sont les ddp d'ordre 1 et 2.

où $F(x_t) = \int_{-\infty}^{x_t} f(x'_t)\,dx'_t$ $\quad F(x_{t1}, x_{t2}) = \iint_{x'_{t1} < x_{t1},\, x'_{t2} < x_{t2}} f(x'_{t1}, x'_{t2})\,dx'_{t1}\,dx'_{t2}$

Il est parfois plus facile de calculer la fonction de répartition $F(x_{t1})$ puis en dériver $f(x_{t1})$.

II-3 Moyenne et moments:

II-3. 1. Moments temporels

X(t, ω) étant un processus aléatoire réel ou complexe, $X(t, \omega_0)$ est une fonction déterministe du temps (pour cette valeur de ω_0 représentant une observation particulière d'un phénomène physique aléatoire.

- On définit **un moment d'ordre 1 ou moyenne temporelle** par:

$$\boxed{\langle X(t,\,\omega_0)\rangle = lim_{T\to 0}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} X(t,\,\omega_0)\,dt\right]}$$

- On définit **le moment d'ordre 2 ou fonction d'auto-corrélation temporelle** par :

$$R_{xx}(\tau,\,\omega_0) = \langle X(t,\,\omega_0)\,X(t-\tau,\,\omega_0)\,\rangle$$
$$R_{xx}(\tau,\,\omega_0) = lim_{T\to 0}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} X(t,\,\omega_0)\,X(t-\tau,\,\omega_0)\,dt\right] \quad ; \quad X(t,\,\omega_0) \in \mathbb{R}$$

Dans le cas d'un processus complexe :

$$\boxed{R_{xx}(\tau,\,\omega_0) = \langle X(t,\,\omega_0)\,\overline{X(t-\tau,\,\omega_0)}\,\rangle}$$

Ces grandeurs sont fonction de l'échantillon choisi.

II-3.2. Moments statistiques

Pour un instant t_0 fixé, le processus aléatoire X(t, ω) devient une variable aléatoire $X(t_0, \omega)$ dont on sait calculer :

- la moyenne statistique **E [X(t, ω_0)]** ;
- la fonction d'auto-corrélation statistique **R_{xx} (t1, t2, ω)** .

$$\begin{array}{ll} R_{xx}(t_1,\ t_2,\omega) = E\left[X(t_1,\omega)\ X(t_2,\ \omega)\right] & X(t,\ \omega) \in \mathbb{C} \\ R_{xx}(t_1,\ t_2,\omega) = E\left[X(t_1,\omega)\ \overline{X(t_2,\ \omega)}\right] & X(t,\ \omega) \in \mathbb{C} \end{array}$$

III. Stationnarité

III.1. Stationnarité au sens large (ordre 2)

On notera le processus aléatoire X(t, ω) en abrégé X(t).

Définition

Un signal aléatoire est dit **stationnaire au sens large** si sa **moyenne statistique** est **indépendante du temps** et si sa **fonction d'auto-corrélation n'est fonction que de l'écart temporel** :

$$E[X(t)] = cte \quad ; \quad R_{xx}(t_1,\ t_2) = R_{xx}(t_1 - t_2)$$

IV. Ergodisme

Définition

Un processus aléatoire est dit **ergodique** lorsque **les moyennes temporelles de tous les échantillons existent et sont indépendantes de l'échantillon**.

La seule classe de processus aléatoires que nous retiendrons pour la pratique en théorie du signal est celle des processus à la fois stationnaires et ergodiques. Un théorème fondamental concerne ces signaux :

Théorème de Birkhoff

Si un processus est à la fois stationnaire et ergodique, alors les moments temporels et les moments statistiques sont égaux.

Ce théorème est fondamental : il montre que les propriétés statistiques des processus stationnaires et ergodiques peuvent être obtenus par l'observation d'une seule réalisation.

L'observation particulière, pendant un temps suffisamment long, permet, avec une précision convenable, de connaître les propriétés statistiques de l'ensemble des réalisations possibles. Ce résultat est heureux, car l'observation de l'ensemble des réalisations possibles du processus, à un instant donné, est elle-même physiquement impossible.

V. Analyse spectrale du processus

Il est mathématiquement délicat de définir l'analogue de la transformée de Fourier pour un signal aléatoire. On raisonne plutôt sur les moments statistiques du signal aléatoire, supposé stationnaire au sens large.

La représentation spectrale dans le domaine des fréquences remplace le signal aléatoire stationnaire X(t) par le signal déterministe **Rxx(t)**. Elle mesure la répartition de puissance dans le domaine des fréquences.

Soit x(t) un signal aléatoire réel ou complexe stationnaire au second ordre. Sa fonction d'auto-corrélation s'écrit :

$$\boxed{R_{xx}(\omega) = E\left[x(t)\,\overline{x(t-\tau)}\right]}$$

Le théorème de Wiener-Khintchine permet d'assurer, sous certaines conditions, que la densité spectrale de puissance Sxx(f) d'un signal aléatoire de fonction d'autocorrélation Rxx(t) est égale à :

$$\boxed{S_{xx}(f) = \mathrm{TF}\left[R_{xx}(\tau)\right]}$$

On aura alors :

$$\boxed{P = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\,df}$$

VI. Exemple de processus aléatoire classique

On s'intéresse au signal sinusoïdal à phase aléatoire Φ répartie uniformément sur [0, 2π]. Étudions la stationnarité et l'ergodisme de x(t). Le caractère aléatoire de x(t) est uniquement dû à la variable aléatoire dont la densité de probabilité est :

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(\Phi) = \dfrac{1}{2\pi} & \Phi \in [0,\ 2\pi] \\ f(\Phi) = 0 & \text{ailleurs} \end{array}}$$

VI.1. Stationnarité à l'ordre 1

$$\boxed{E\{X(t)\} = E\{A\cos(2\pi f_0 t + \Phi)\}}$$

D'après le théorème de la moyenne :

$$\boxed{E\{X(t)\} = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \Phi)\,d\Phi = 0}$$

Ce résultat étant indépendant de t, la stationnarité à l'ordre 1 est donc vérifiée.

VI.2. Stationnarité à l'ordre 2

$$R_{xx}(t,\ \tau) = E\{x(t)\ \overline{x(t-\tau})\}$$
$$R_{xx}(t,\ \tau) = \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi\ f_0\ t+\Phi)\ \cos\left[2\pi\ f_0\ (t-\tau)+\Phi\right]\ d\Phi$$
$$R_{xx}(t,\ \tau) = \frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\cos\left[2\pi\ f_0\ (2\,t-\tau)+2\ \Phi)\right]+\cos(2\pi\ f_0\ \tau)\right\}\ d\Phi$$
$$R_{xx}(t,\ \tau) = \frac{A^2}{4\pi}\ \cos(2\pi\ f_0\ \tau)\int_0^{2\pi} d\Phi = \frac{A^2}{2}\ \cos(2\pi\ f_0\ \tau)$$

Ce résultat étant indépendant de t, la stationnarité au sens large est donc vérifiée.

VI.3. Ergodisme à l'ordre 1

$$\langle x(t,\Phi)\rangle = lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi\ f_0\ t+\Phi)\ dt\right\}$$
$$\langle x(t,\Phi)\rangle = lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A}{T}\ \frac{\sin(2\pi\ f_0\ t+\Phi)}{2\pi\ f_0}\right\}_{-T/2}^{+T/2}$$
$$\langle x(t,\Phi)\rangle = lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A}{T}\ \frac{\sin(\pi\ f_0\ T+\Phi)+\sin(\pi\ f_0\ T-\Phi)}{2\pi\ f_0}\right\} = 0$$

Ce résultat étant indépendant de Φ, le processus est ergodique à l'ordre 1.

VI.4. Ergodisme à l'ordre 2

$$\langle x(t,\ \Phi)\ x(t-\tau,\ \Phi)\rangle$$
$$= lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi\ f_0\ t+\Phi)\ \cos\left[2\pi\ f_0\ (t-\tau)+\Phi\right]\ dt\right\}$$
$$= lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos\left[2\pi\ f_0\ (2\,t-\tau)+2\ \Phi\right]\ dt+\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi\ f_0\ \tau)\ dt\right\}$$
$$= \frac{A^2}{2}\ \cos(2\pi\ f_0\ \tau)$$

Ce résultat étant indépendant de Φ, le processus est donc ergodique au sens large.

Remarque

Le signal sinusoïdal à phase aléatoire et uniformément répartie sur $[0,\ 2\pi]$ fournit un excellent exemple de processus à la fois stationnaire et ergodique. Par ailleurs, les moments statistiques et temporels d'un même ordre sont égaux, ce qui permet de faire référence au théorème de Birkhoff :

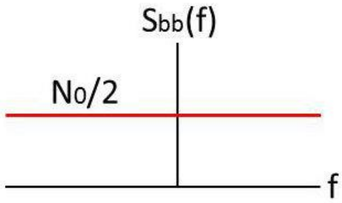
Dans une application ergodique, moyenne spatiale et moyenne temporelle sont égales presque partout.

VII. Notion de bruit blanc

Définition

Un bruit blanc est un signal aléatoire b(t) stationnaire au second ordre dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences :

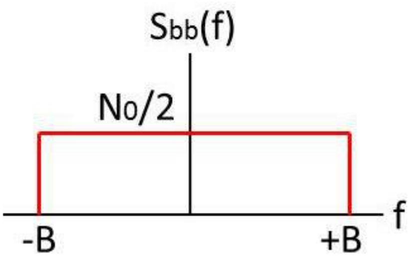
$$S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2} \qquad \forall f$$
$$R_{bb}(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$$



Bruit pseudo-blanc
Comme le montre la figure, le bruit est de puissance moyenne infinie, ce qui correspond à une idéalisation de la réalité.

Schématiquement, on assimilera à un bruit blanc tout signal dont la densité spectrale est constante dans une bande beaucoup plus large que la bande dans laquelle on l'observe. On peut donc définir un bruit blanc à bande limitée (bruit pseudo-blanc) par :

$$S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2} \qquad |f| < B$$
$$S_{bb}(f) = 0 \qquad \text{ailleurs}$$



D'où l'on déduit :

$$\boxed{R_{bb}(\tau) = N_0\ B\ \sin c\ (2\pi\ B\ \tau)}$$

La formule montre qu'un tel bruit converge vers un bruit blanc lorsque BB tend vers l'infini, car le sinus cardinal reste une quantité finie.

Tout bruit sera considéré comme un processus aléatoire stationnaire d'ordre 2, centré, additif et indépendant du signal aléatoire auquel il vient se superposer.

On a vu que le bruit blanc n'existait pas réellement. Mais on s'en approche avec le bruit émis par le rayonnement du corps noir régi par la loi de Planck. La DSP d'un tel bruit est exprimée par la formule :

$$S_{bb}(f) = \frac{h\,f}{e^{h\,f/k\,T} - 1}$$

- h : constante de Boltzmann
- k : constante de Planck
- T : température absolue (en kelvins) du corps noir

On remarque que, si hf ≪ kT (cas des fréquences radioélectriques), on a :

$$e^{h\,f/k\,T} \approx 1 + \frac{h\,f}{k\,T}$$

Il s'ensuit que :

$$S_{bb}(f) = k\,T = cte$$

On fait souvent l'hypothèse supplémentaire que le bruit blanc est gaussien, ce qui est le cas du bruit thermique produit par une résistance.

Ces deux hypothèses sont toutefois indépendantes, le terme bruit blanc faisant appel aux propriétés énergétiques du processus alors que le terme gaussien fait appel à des propriétés statistiques.

On dit qu'un signal aléatoire X(t)– et en particulier un bruit blanc – est gaussien si, quelle que soit la suite de N instants {ti}, la variable aléatoire à N dimensions {X(ti)} est une variable gaussienne, c'est-à-dire dont la densité de probabilité suit une loi de Gauss.

Si b(t) est un bruit blanc centré gaussien :

$$f(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-b^2/2\,\sigma^2}$$
$$P_b = R_{bb}(0) = E\big[b(t)\,b(t)\big] = E\big[b^2(t)\big]$$
$$P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}}\, e^{-b^2/2\,\sigma^2}\, db$$

Posant u = b /(σ.√2) , il vient :

$$P_b = \frac{2\,\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\, e^{-u^2}\, du$$
$$P_b = \frac{2\,\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2$$

D'où une importante remarque : si b(t) est un bruit blanc gaussien centré, la variance σ^2 est égale à la puissance moyenne de bruit. Un bruit blanc à bande limitée aura comme puissance de bruit :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2}\, 2\,B = N_0\ B$$

VIII. Exemple de processus aléatoire classique

On s'intéresse au signal sinusoïdal à phase aléatoire Φ répartie uniformément sur $[0,\ 2\pi]$. Étudions la stationnarité et l'ergodisme de x(t). Le caractère aléatoire de x(t) est uniquement dû à la variable aléatoire dont la densité de probabilité est :

$$\begin{array}{ll} f(\Phi) = \dfrac{1}{2\pi} & \Phi \in [0,\ 2\pi] \\ f(\Phi) = 0 & \text{ailleurs} \end{array}$$

VIII.1. Stationnarité à l'ordre 1

$$E\{X(t)\} = E\{A\cos(2\pi f_0 t + \Phi)\}$$

D'après le théorème de la moyenne :

$$E\{X(t)\} = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \Phi)\, d\Phi = 0$$

Ce résultat étant indépendant de t, la stationnarité à l'ordre 1 est donc vérifiée.

VIII.2. Stationnarité à l'ordre 2

$$\begin{aligned}
R_{xx}(t,\ \tau) &= E\{x(t)\ \overline{x(t-\tau)}\} \\
R_{xx}(t,\ \tau) &= \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi\ f_0\ t + \Phi)\ \cos\left[2\pi\ f_0\ (t-\tau) + \Phi\right]\ d\Phi \\
R_{xx}(t,\ \tau) &= \frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\cos\left[2\pi\ f_0\ (2\,t-\tau) + 2\ \Phi)\right] + \cos(2\pi\ f_0\ \tau)\right\} d\Phi \\
R_{xx}(t,\ \tau) &= \frac{A^2}{4\pi}\ \cos(2\pi\ f_0\ \tau)\int_0^{2\pi} d\Phi = \frac{A^2}{2}\ \cos(2\pi\ f_0\ \tau)
\end{aligned}$$

Ce résultat étant indépendant de t, la stationnarité au sens large est donc vérifiée.

VIII.3. Ergodisme à l'ordre 1

$$\langle x(t,\Phi)\rangle = lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi\, f_0\, t+\Phi)\, dt\right\}$$

$$\langle x(t,\Phi)\rangle = lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A}{T}\,\frac{\sin(2\pi\, f_0\, t+\Phi)}{2\pi\, f_0}\right\}_{-T/2}^{+T/2}$$

$$\langle x(t,\Phi)\rangle = lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A}{T}\,\frac{\sin(\pi\, f_0\, T+\Phi)+\sin(\pi\, f_0\, T-\Phi)}{2\pi\, f_0}\right\} = 0$$

Ce résultat étant indépendant de Φ, le processus est ergodique à l'ordre 1.

VIII.4. Ergodisme à l'ordre 2

$$\begin{aligned}
&\langle x(t,\ \Phi)\, x(t-\tau,\ \Phi)\rangle \\
&\quad = lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi\, f_0\, t+\Phi)\ \cos\left[2\pi\, f_0\, (t-\tau)+\Phi\right]\, dt\right\} \\
&\quad = lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos\left[2\pi\, f_0\, (2\, t-\tau)+2\, \Phi\right]\, dt+\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi\, f_0\, \tau)\, dt\right\} \\
&\quad = \frac{A^2}{2}\ \cos(2\pi\, f_0\, \tau)
\end{aligned}$$

Ce résultat étant indépendant de Φ, le processus est donc ergodique au sens large.

Remarque

Le signal sinusoïdal à phase aléatoire et uniformément répartie sur [0, 2π] fournit un excellent exemple de processus à la fois stationnaire et ergodique. Par ailleurs, les moments statistiques et temporels d'un même ordre sont égaux, ce qui permet de faire référence au théorème de Birkhoff :

Dans une application ergodique, moyenne spatiale et moyenne temporelle sont égales presque partout.
Actualisé le 2017-06-01