UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL — جامعة مولاي إسماعيل
FACULTÉ DES SCIENCES — كلية العلوم

Département de Physique **A.U. : 2019-2020**

SMP S6 E.I.I.

Traitement du Signal

TD N°2

Spectre, convolution et fonction d'autocorrélation

Exercice 1 : Spectre d'un peigne de Dirac

Montrer que le spectre d'un peigne de Dirac de période Tet d'amplitude 1 ($Ш_T(t)$) est un peigne de Dirac de période et d'amplitude 1/T.

Exercice 2 : Signal porte, densité spectrale et fonction d'autocorrélation

1- Calculer la transformée de Fourier du signal porte $\Pi_T(t)$ de largeur T et d'amplitude 1 défini par :

$$\Pi_T(t) = 1 \quad \text{si} \quad \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$\text{et} \quad \Pi_T(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

2- En déduire le spectre du signal porte $\Pi_T(t)$ et sa densité spectrale d'énergie.

3- En déduire l'énergie totale du signal et sa fonction d'autocorrélation $C_{ss}(\tau)$.

4- Retrouver l'énergie totale à partir de la fonction d'autocorrélation $C_{ss}(\tau)$ du signal $s(t)$.

5- En déduire de 1, la transformée de Fourier du signal **sinc(t)** et la représenter.

Exercice 3: Spectre d'un signal sinusoïdal tronqué

On considère le signal sinusoïdal $s_1(t)$ défini par : $s_1(t) = a \cos 2\pi f_0 t$.

On observe le signal $s_1(t)$ sur une durée **T** (fenêtre de largeur T).

1- Quelle est l'expression du signal $s_2(t)$ traduisant cette observation?

2- Calculer le spectre en fréquence du signal $s_2(t)$.

3- Que peut-on conclure si T tend vers l'infini ?

Exercice 4 : Spectre d'un signal triangulaire

On considère le signal triangulaire d'amplitude 1 et de largeur 2T noté $\Lambda_T(t)$ défini par :

$$\Lambda_T(t) = 1 - \frac{|t|}{T} \quad \text{si} - T \leq t \leq T$$

$$\text{et} \quad \Lambda_T(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

1- Calculer le spectre en fréquence du signal triangle $\Lambda_T(t)$.

2- Sachant que le produit de convolution de deux signaux portes $\Pi_T(t)$ est un signal triangle de largeur 2T, retrouver le résultat de 1.

Exercice 5 : Convolution des signaux

1- Calculer le produit de convolution de deux signaux portes Π_T **(t)** de largeur T et d'amplitude 1

2- En déduire le spectre en fréquence du signal triangle $\Lambda_T(t)$ de largeur 2T.

3- Calculer le produit de convolution des deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ définies par :

$$s_1(t) = 1 \text{ si } -1 \leq t < 3 \quad \text{et} \quad s_1(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

$$s_2(t) = t/2 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 2 \quad \text{et} \quad s_2(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

Exercice 6 : Fonction d'autocorrélation

On considère le signal $s(t)$ défini par : $s(t) = S_0 . e^{-at}\, u(t)$

avec $a > 0$ et $u(t)$: le signal de Heaviside (ou échelon unité).

1- Représenter sur le même graphe, l'allure des signaux $s(t)$ et de $s(t - t_0)$.

2- Montrer que la fonction d'autocorrélation $C_{ss}(\tau) = \frac{S_0^2}{2a} . e^{-a\tau}$

3- Vérifier les propriétés suivantes de la fonction d'autocorrélation :

(i) $C_{ss}(0)$ = Puissance moyenne,

(ii) $C_{ss}(\tau) = C_{ss}^*(-\tau)$: symétrie hermitienne,

(iii) $|C_{ss}(\tau)| \leq C_{ss}(0)$: la fonction est maximale en 0.

Exercice 3 : Transformée de Fourier (TF) d'un signal porte (**)

1) Calculer la TF du signal porte défini par : x(t) A.rect (t) T = et dont la représentation graphique est : 2) La représenter ainsi que son spectre (d'amplitude). 3) En déduire sa densité spectrale d'énergie. 4) En déduire son énergie totale. 5) En déduire sa fonction d'autocorrélation. Retrouver l'énergie à partir de cette dernière. 6) Déduire du 1) la TF de sin c(t), et la représenter.

Exercice 6 : signaux et fonction d'autocorrélation

On considère le signal s(t) défini par : $\mathbf{s(t) = S_0} e^{-at}\ \mathbf{u(t)}$

avec $a > 0$et u(t) le signal de Heaviside (échelon unité).

1. Représenter sur le même graphe l'allure de s(t) et de $s(t - t_0)$.
2. Montrer que la fonction d'autocorrélation $\mathbf{C_{ss}}\ (\tau) = \frac{S_0^2}{2a} e^{-a\tau}$
3. Vérifier les propriétés suivantes de la fonction d'autocorrélation :

(i) $C_{ss}(0)$ =Puissance moyenne,

(ii) $C_{ss}(\tau) = C_{ss}^*(-\tau)$: symétrie hermitienne.

(iii) $|Css(\tau)| \leq \cdot C_{ss}(0)$: la fonction est maximum en 0,

4. Mêmes questions pour la fonction porte $\Pi_\theta(t)$

Exercices : Autocorrélation

Soit le signal$\mathbf{s(t) = S_0 exp(-j\omega_0 t)}$

1. Montrer que s(t) est périodique de période T_0.
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $C_{ss}(t)$ du signal s(t).
3. Vérifier les propriétés de la fonction d'autocorrélation suivantes :

(a) $C_{ss}(0)$ =Puissance moyenne,

(b) $C_{ss}(\tau) = C_{ss}^*(-\tau)$: symétrie hermitienne,

(c) $|Css(\tau)| \leq \cdot C_{ss}(0)$: la fonction est maximum en 0,

(d) comme s(t) est périodique alors $C_{ss}(\tau)$ est périodique.

2.5 Exercices : Autocorrélation

Soit la fonction $x(t) = S_0\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}$

1. Montrer que cette fonction est périodique de période T_0 $(x(t+T_0) = x(t))$.
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$.
3. Vérifier les propriétés de la fonction d'autocorrélation suivantes :
   (a) $C_{xx}(0)$ =Puissance moyenne,
   (b) $C_{xx}(\tau) = C^*_{xx}(-\tau)$: symétrie hermitienne,
   (c) $|C_{xx}| \leq C_{xx}(0)$: la fonction est maximum en 0,
   (d) comme $x(t)$ est périodique alors $C_{xx}(\tau)$ est périodique.

Soit la fonction $x(t) = S_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,u(t)$

avec $\alpha > 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et 0 ailleurs

1. Représenter sur le même graphe l'allure de $x(t)$ et de $x(t-t_0)$.
2. Montrer que la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$ est

$$C_{xx}(\tau) = \frac{S_0^2}{2\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha\tau}$$

3. Vérifier les propriétés de la fonction d'autocorrélation (3a), (3b), (3c)
4. Mêmes questions pour la fonction porte $\Pi_\theta(t)$.