Département de Physique **A.U. : 2019-2020**

TD de Traitement du signal
TD N° 4
Signaux aléatoires

Exercice 1 : (Examen juin 2015)

On considère **x(t),** un processus stochastique stationnaire au sens large de moyenne nulle et de fonction de corrélation **Rxx (τ)** et soit le signal **y(t)** **défini par :** **y(t) = x(t) + A t**,

A : une variable aléatoire de moyenne nulle, de variance égale à 1 et indépendante de **x(t).**

1- Calculer la moyenne **E[y(t)]** et la fonction de corrélation **Ryy (t + τ, t)** de **y(t).**

2-y(t) est-il stationnaire au sens large?

3- Calculer la fonction d'inter-corrélation **Rxy(t + τ, t)** entre **x(t + τ)** et **y(t).**

Exercice 2: (Examen janvier 2014)

A l'entrée d'un filtre linéaire invariant dans le temps et de réponse impulsionnelle **h(t)**, on applique un signal aléatoire : **e (t) = x (t) + b (t)**

$x(t) = \lambda \cos(2\pi f_0 t)$; λ **et** f_0 des constantes et **b (t)** : un bruit blanc stationnaire de densité spectrale de puissance σ_b^2 ;

$h(t) = \exp(-a t)\, U(t)$; $a>0$ et U **(t)** : la fonction échelon unité.

1- Calculer la T.F de h(t) notée **H(f)**. Que représente-t-elle?

2- Déterminer la puissance du signal $g_b(t)$ défini par $g_b(t) = b(t) * h(t)$ qu'on notera P_{g_b}

3- Déterminer le spectre du signal filtré défini par : $g_x(t) = x(t) * h(t)$

On mettra **H(f)** sous la forme $H(f) = A(f) \exp[j\Phi(f)]$.

4- En déduire l'expression du signal $g_x(t)$ etsa puissance qu'on notera P_{g_x}.

5- En déduire le rapport signal-bruit du signal filtré défini par : $RSB = \frac{P_{g_x}}{P_{g_b}}$

N.B : * désigne l'opérateur de convolution ; $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$ et $DSP[g_b(t)] = \sigma_b^2 |H(f)|^2$

Exercice 3 :

On considère le signal $s(t) = x(t) + A\cos(2\pi f_0 t)$ avec **x(t)** un bruit stationnaire de moyenne nulle et $A\cos(2\pi f_0 t)$ un signal déterministe.

1- Montrer que **s(t)** n'est pas stationnaire et calculer sa puissance instantanée moyenne.

2- Calculer la puissance moyenne temporelle de **s(t)** et la comparer avec celle obtenue en 1.

3- Calculer la fonction d'autocorrélation du signal **s(t)** puis sa valeur moyenne temporelle.

4- Etudier la densité spectrale de **s(t).**

5- Si **x(t)** est un bruit gaussien, donner l'allure de la densité spectrale associée à **y(t).**

Exercice 4 :

On considère le signal sinusoïdal bruité : $\mathbf{s(t) = \cos(w_0 t + \theta) + b(t)}$ transmis à travers un filtre linéaire de réponse fréquentielle : $\mathbf{H(\omega) = \dfrac{R/L}{j\omega + R/L}}$, où $\mathbf{b(t)}$ est un bruit de moyenne nulle et de fonction de corrélation : $\mathbf{R_b(\tau) = K\,\delta(\tau)}$.

$\mathbf{w_0}$ est une constante et $\boldsymbol{\theta}$ une variable aléatoire uniformément distribuée sur $\mathbf{]\pi, 2\pi[}$; $\mathbf{b(t)}$ et $\boldsymbol{\theta}$ sont indépendants.

1- Calculer la moyenne $\mathbf{E(s(t))}$ de $\mathbf{s(t)}$.

2- Calculer la fonction de corrélation $\mathbf{R_{ss}(t + \tau, t)}$ **de** $\mathbf{s(t)}$.

3- $\mathbf{s(t)}$ est-il stationnaire au sens large?

4- $\mathbf{b(t)}$ est-il stationnaire au sens large?

5- Calculer la moyenne $\mathbf{E(y(t))}$ de la sortie y(t) du filtre quand on applique s(t).

Nota : on donne primitive de $\mathbf{e^{ax} \sin w_0 x}$ est : $\dfrac{\mathbf{e^{ax}}}{\mathbf{a^2 + w_0^2}}\left[\mathbf{a \sin w_0 x - w_0 \cos w_0 x}\right]$

6- Calculer la densité spectrale de puissance de **b(t).**

Exercice 5 :(Examen de rattrapage Fevrier 2014)

Dans une chaine de télécommunication, le canal de transmission est modélisé par l'addition au signal transmis d'un bruit **b(t)** suivi d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure F_c comme représenté par la figure 1. Le bruit est un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale de puissance **B** et indépendant du signal transmis. Le signal reçu est noté **r(t).**

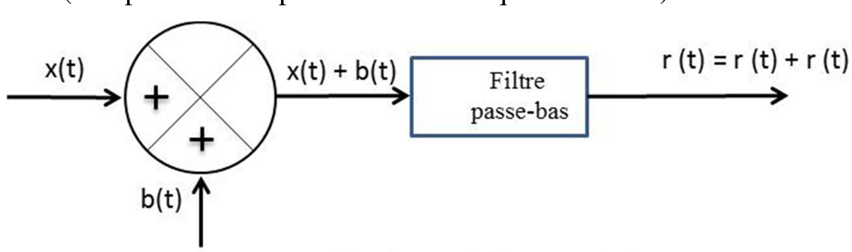
1- Théoriquement pour transmettre le signal sans démonstration, quelle devrait être la fréquence de coupure du filtre modélisant le canal ?

2- En pratique $F_c = 2/T$, déterminer l'expression de **r(t)** en fonction du signal transmis x(t), du bruit b(t) et de la réponse impulsionnelle du filtre **h(t).**

3- En déduire l'expression de la fonction d'autocorrélation du signal reçu, $\mathbf{C_{rr}(\tau)}$ en fonction des fonctions d'autocorrélation du signal reçu et du bruit reçu, respectivement $\mathbf{C_{rx}(\tau)}$ et $\mathbf{C_{rb}(\tau)}$

4- Déterminer l'expression de la densité spectrale de puissance, **Sr(f)** du signal reçu et la représenter.

5- Déterminer le rapport signal sur bruit avant et après la transmission ; le signal étant le signal quantifié (non prise en compte de l'erreur de quantification).



Modèle du canal de transmission

Figure 1

Exercice 1

Exercice 2 (extrait de Tourneret examen april 2006)

En radar, pour estimer l'instant d'arrivée d'un écho dû à une cible, on calcule à la réception la fonction g(t) définie par **:** $\boldsymbol{g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(u)\, x(u-t)\mathrm{du}}$

où r(t) désigne le signal reçu et x(t) est le signal émis (qui est supposé connu).

Dans cet exercice, on supposera que ; **$x(t) = A\ \Pi_T\,(t - T/2)$**

(i.e. x(t) = A si t ∈[0, T] et x(t) = 0 si t / ∈[0, T]).

1) A quelle classe appartient le signal x(t) ?

2) Déterminer la transformée de Fourier, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale d'énergie du signal x(t).

3) En l'absence de bruit, on a**$r(t) = x(t - t_0)$.**

Représenter alors graphiquement la fonction g(t) obtenue.

4) En présence de bruit, on a**$r(t) = x(t - t_0) + b(t)$**, où b(t) est un signal aléatoire modélisant le bruit additif perturbant l'écho de la cible.

On suppose dans cet exercice que b(t) est un bruit blanc gaussien (de moyenne nulle). Expliquer ce que cela signifie.

L'opération qui associe au signal aléatoire r(t) le signal g(t) est-elle une opération de filtrage linéaire invariant dans le temps ? Si oui, déterminer la réponse impulsionnelle et la transmittance de ce filtre.

Déterminer la moyenne de la fonction g(t) lorsque **$r(t) = x(t - t_0) + b(t)$.**

Expliquer qualitativement l'effet du bruit b(t) sur la fonction g(t). Représenter graphiquement un exemple de fonction g(t) obtenue en présence de bruit.

Exercice 3 :

Soit le processus stochastique x(t) = r cos(ωt + φ) où r est une v.a. . φ et ω sont des variables réelles.

x(t) est-il stationnaire au sens large ?

Soit le processus stochastique x(t) = r cos(ωt + φ) o`u r est une v.a. . φ et ω sont des variables réelles.

Sa moyenne est donnée par : E[x(t)] = cos(ωt + φ)E[r]

Celle-ci n'est constante que si E[r] = 0.

La corrélation peut s´écrire : Rx(t, t + τ) = E[x(t)x(t + τ)] = cos(ωt + φ) cos(ω(t + τ) + φ)E[r2] On obtient finalement, Rx(t, t + τ) = E[r2] 2 [cos ωτ + cos(2ωt + 2φ + ωτ)]

Cette dernière expression dépend explicitement de t et de τ . Le processus stochastique n'est donc pas SSL.

Exercice

1)On considèreA et B sont deux variables aléatoires indépendantes de moyennes nulles et de variances $\mathbf{E\,[A^2] = E\,[B^2] = \sigma^2}$ et on construit le signal $\mathbf{X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$, avecω une constante positive.

a- Le signal **X(t)** est-il stationnaire ?

b- Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal **X(t).**

2) On considère cette fois-ci un signal aléatoire stationnaire **X(t)** de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $\mathbf{S_X(f) = 2a}$, où a est une constante positive. Le signal **Y (t)** est obtenu par filtrage linéaire (invariant dans le temps) de **X(t)** avec un filtre de transmittance H(f)

$$H(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}.$$

- Déterminer la densité spectrale de puissance, la fonction d'autocorrélation et la puissance du signal **Y (t).**

3) On considère un signal aléatoire gaussien stationnaire **X(t)** de moyenne nulle, de puissance $\mathbf{E\,[X^2(t)] = \sigma^2}$ et de fonction d'autocorrélation $\mathbf{R_{xx}(\tau) = E\,[X(t)\,X(t-\tau)]}$**.**

a- Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $\mathbf{Y(t) = \exp\,[X(t)]}$ en fonction de $\mathbf{R_{xx}(\tau)}$ et d'une constante multiplicative notée **C**.

b- Déterminer ensuite cette constante multiplicative.

Indication : on rappelle que si **Z**est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance$\boldsymbol{\sigma^2}$, alors

$$E\left[e^{uZ}\right] = \exp\left(\frac{u^2\sigma^2}{2}\right).$$

4) On considère une suite d'instants aléatoires $\mathbf{\{t_i\}\ i \in Z}$ constituant un processus de Poisson (homogène) de paramètre λ. On appelle $\mathbf{N(t, \tau)}$ le nombre d'instants appartenant à l'intervalle $\mathbf{[t, t+\tau[}$

a-Que représente le paramètre **λ**?

b-Déterminer la probabilité d'avoir $\mathbf{N(t, \tau) = 0}$.

c-Déterminer la probabilité d'avoir $\mathbf{N(t, \tau)}$ pair

Correction

1) (3pts) La moyenne du signal $X(t)$ est

$$E[X(t)] = E[A]\cos(\omega t) + E[B]\sin(\omega t) = 0.$$

La fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= E\{[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)][A\cos(\omega(t-\tau)) + B\sin(\omega(t-\tau))]\} \\ &= E[A^2]\cos(\omega t)\cos[\omega(t-\tau)] + E[AB]\cos(\omega t)\sin[\omega(t-\tau)] \\ &\quad + E[AB]\sin(\omega t)\cos[\omega(t-\tau)] + E[B^2]\sin(\omega t)\sin[\omega(t-\tau)]. \end{aligned}$$

4) On considère une suite d'instants aléatoires $\{t_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ constituant un processus de Poisson (homogène) de paramètre λ. On appelle $N(t,\tau)$ le nombre d'instants appartenant à l'intervalle $[t, t+\tau[$

- Que représente le paramètre λ ?
- Déterminer la probabilité d'avoir $N(t,\tau) = 0$.
- Déterminer la probabilité d'avoir $N(t,\tau)$ pair

Puisque les variables aléatoires A et B sont indépendantes et de moyennes nulles, on a

$$E[AB] = E[A]\,E[B] = 0.$$

De plus, $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$, d'où

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= \sigma^2 \{\cos(\omega t)\cos[\omega(t-\tau)] + \sin(\omega t)\sin[\omega(t-\tau)]\} \\ &= \sigma^2 \cos(\omega\tau) \\ &= R_X(\tau). \end{aligned}$$

Puisque la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ sont indépendantes du temps, le signal $X(t)$ est stationnaire. Sa fonction d'autocorrélation a été déterminée ci-dessus. La densité spectrale de puissance du signal $X(t)$ est

$$\begin{aligned} s_X(f) &= \text{TF}[R_X(\tau)] \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left[\delta\left(f - \frac{\omega}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{\omega}{2\pi}\right)\right]. \end{aligned}$$

2) (2pts) D'après la relation de Wiener-Lee, la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ est

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= s_X(f)\,|H(f)|^2 \\ &= \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}. \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ est donc

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \text{TF}^{-1}[s_Y(f)] \\ &= e^{-a|\tau|} \text{ (voir tables)} \end{aligned}$$

et par suite la puissance de $Y(t)$ est

$$E\left[Y^2(t)\right] = R_Y(0) = 1.$$

3) (3 pts) En utilisant le théorème de Price, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)}\frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)}\right] \\ &= E\left[e^{X(t)}e^{X(t-\tau)}\right] \\ &= E[Y(t)Y(t-\tau)] \\ &= R_Y(\tau). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{R_Y(\tau)} = \partial R_X(\tau)$$

soit

$$\ln[|R_Y(\tau)|] = R_X(\tau) + \text{constante}$$

et en conséquence

$$R_Y(\tau) = C\exp[R_X(\tau)].$$

2

Pour déterminer la constante multiplicative C, il suffit comme d'habitude de faire $\tau = 0$ dans la relation ci-dessus. On a alors

$$C = \frac{R_Y(0)}{\exp\left[R_X(0)\right]} = \frac{R_Y(0)}{\exp\left(\sigma^2\right)}.$$

Mais

$$R_Y(0) = E\left[Y^2(t)\right] = E\left[e^{2X(t)}\right].$$

En utilisant le rappel, puisque $X(t)$ est un processus aléatoire gaussien, on en déduit

$$R_Y(0) = \exp\left(2\sigma^2\right).$$

D'où

$$C = \exp\left(\sigma^2\right).$$

La fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ est donc

$$R_Y(\tau) = \exp\left[\sigma^2 + R_X(\tau)\right].$$

4) (2pts) Ces trois questions ont été traitées en cours

- λ est le nombre moyen d'instants dans un intervalle de largeur $\tau = 1$ puisque

$$E\left[N(t,\tau)\right] = \lambda\left|\tau\right| \Longrightarrow \lambda = E\left[N(t,\tau=1)\right]$$

- Puisque $N(t,\tau)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\left|\tau\right|$, on a

$$P\left[N(t,\tau)=0\right] = \frac{\left(\lambda\left|\tau\right|\right)^0}{0!}\exp\left(-\lambda\left|\tau\right|\right) = \exp\left(-\lambda\left|\tau\right|\right)$$

- Puisque $N(t,\tau)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\left|\tau\right|$, on a

$$\begin{aligned}
P\left[N(t,\tau)\text{ pair}\right] &= P\left[N(t,\tau)=0 \text{ ou } N(t,\tau)=2 \text{ ou } N(t,\tau)=4 \text{ ou } ...\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left[N(t,\tau)=2k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda\left|\tau\right|\right]^{2k}}{(2k)!}\exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right] \\
&= \exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right]\operatorname{ch}\left(-\lambda\left|\tau\right|\right) \\
&= \exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right]\frac{\exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right]+\exp\left[\lambda\left|\tau\right|\right]}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\exp\left(-2\lambda\left|\tau\right|\right)\right].
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

Soit un processus stochastique stationnaire au sens large $x(t)$ de moyenne nulle et de fonction de corrélation $R_x(\tau)$. Soit $y(t) = x(t) + At$ où A est une variable aléatoire de moyenne nulle, de variance égale à 1 et indépendante de $x(t)$.

1- Calculer la moyenne $E[y(t)]$ et la fonction de corrélation $R_y(t+\tau, t)$ de $y(t)$.

$$E[y(t)] = E[x(t) + At] = E[x(t)] + tE[A] = 0$$

$$\boxed{E[y(t)] = 0}$$

De même,

$$\begin{aligned} R_y(t+\tau, t) &= E[y(t+\tau, t)y(t)] \\ &= E[x(t+\tau)x(t)] + tE[x(t+\tau)A] + (t+\tau)E[Ax(t)] + (t+\tau)tE[A^2] \\ &= R_x(\tau) + tE[x(t+\tau)]E[A] + (t+\tau)E[A]E[x(t)] + (t+\tau)t \\ &= R_x(\tau) + (t+\tau)t \end{aligned}$$

$$\boxed{R_y(t+\tau, t) = R_x(\tau) + (t+\tau)t}$$

2- $y(t)$ est-il stationnaire au sens large?
Le processus $y(t)$ n'est pas stationnaire au sens large puisque sa fonction de corrélation dépend explicitement de t et de τ.

3- Calculer l'intercorrélation $R_{xy}(t+\tau, t)$ entre $x(t+\tau)$ et $y(t)$.

$$\begin{aligned} R_{xy}(t+\tau, t) &= E[x(t+\tau)y(t)] \\ &= E[x(t+\tau)x(t)] + E[x(t+\tau)At] \\ &= R_x(\tau) + tE[x(t+\tau)]E[A] = R_x(\tau) \end{aligned}$$

$$\boxed{R_{xy}(t+\tau, t) = R_x(\tau)}$$

Correction

1) (3pts) La moyenne du signal $X(t)$ est

$$E[X(t)] = E[A]\cos(\omega t) + E[B]\sin(\omega t) = 0.$$

La fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= E\{[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)][A\cos(\omega(t-\tau)) + B\sin(\omega(t-\tau))]\} \\ &= E\left[A^2\right]\cos(\omega t)\cos[\omega(t-\tau)] + E[AB]\cos(\omega t)\sin[\omega(t-\tau)] \\ &\quad + E[AB]\sin(\omega t)\cos[\omega(t-\tau)] + E\left[B^2\right]\sin(\omega t)\sin[\omega(t-\tau)]. \end{aligned}$$

Puisque les variables aléatoires A et B sont indépendantes et de moyennes nulles, on a

$$E[AB] = E[A]E[B] = 0.$$

De plus, $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$, d'où

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= \sigma^2\{\cos(\omega t)\cos[\omega(t-\tau)] + \sin(\omega t)\sin[\omega(t-\tau)]\} \\ &= \sigma^2\cos(\omega\tau) \\ &= R_X(\tau). \end{aligned}$$

Puisque la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ sont indépendantes du temps, le signal $X(t)$ est stationnaire. Sa fonction d'autocorrélation a été déterminée ci-dessus. La densité spectrale de puissance du signal $X(t)$ est

$$\begin{aligned} s_X(f) &= \mathrm{TF}[R_X(\tau)] \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left[\delta\left(f - \frac{\omega}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{\omega}{2\pi}\right)\right]. \end{aligned}$$

2) (2pts) D'après la relation de Wiener-Lee, la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ est

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= s_X(f)|H(f)|^2 \\ &= \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}. \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ est donc

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \mathrm{TF}^{-1}[s_Y(f)] \\ &= e^{-a|\tau|} \text{ (voir tables)} \end{aligned}$$

et par suite la puissance de $Y(t)$ est

$$E\left[Y^2(t)\right] = R_Y(0) = 1.$$

3) (3 pts) En utilisant le théorème de Price, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)}\frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)}\right]\\ &= E\left[e^{X(t)}e^{X(t-\tau)}\right]\\ &= E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right]\\ &= R_Y(\tau).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{R_Y(\tau)} = \partial R_X(\tau)$$

soit

$$\ln\left[|R_Y(\tau)|\right] = R_X(\tau) + \text{constante}$$

et en conséquence

$$R_Y(\tau) = C\exp\left[R_X(\tau)\right].$$

2

Pour déterminer la constante multiplicative C, il suffit comme d'habitude de faire $\tau = 0$ dans la relation ci-dessus. On a alors

$$C = \frac{R_Y(0)}{\exp\left[R_X(0)\right]} = \frac{R_Y(0)}{\exp\left(\sigma^2\right)}.$$

Mais

$$R_Y(0) = E\left[Y^2(t)\right] = E\left[e^{2X(t)}\right].$$

En utilisant le rappel, puisque $X(t)$ est un processus aléatoire gaussien, on en déduit

$$R_Y(0) = \exp\left(2\sigma^2\right).$$

D'où

$$C = \exp\left(\sigma^2\right).$$

La fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ est donc

$$R_Y(\tau) = \exp\left[\sigma^2 + R_X(\tau)\right].$$

4) (2pts) Ces trois questions ont été traitées en cours

- λ est le nombre moyen d'instants dans un intervalle de largeur $\tau = 1$ puisque

$$E\left[N(t,\tau)\right] = \lambda\left|\tau\right| \Longrightarrow \lambda = E\left[N(t,\tau=1)\right]$$

- Puisque $N(t,\tau)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\left|\tau\right|$, on a

$$P\left[N(t,\tau)=0\right] = \frac{\left(\lambda\left|\tau\right|\right)^0}{0!}\exp\left(-\lambda\left|\tau\right|\right) = \exp\left(-\lambda\left|\tau\right|\right)$$

- Puisque $N(t,\tau)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\left|\tau\right|$, on a

$$\begin{aligned}
P\left[N(t,\tau)\text{ pair}\right] &= P\left[N(t,\tau)=0 \text{ ou } N(t,\tau)=2 \text{ ou } N(t,\tau)=4 \text{ ou } ...\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left[N(t,\tau)=2k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda\left|\tau\right|\right]^{2k}}{(2k)!}\exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right] \\
&= \exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right]\operatorname{ch}\left(-\lambda\left|\tau\right|\right) \\
&= \exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right]\frac{\exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right]+\exp\left[\lambda\left|\tau\right|\right]}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\exp\left(-2\lambda\left|\tau\right|\right)\right].
\end{aligned}$$