

Analyse spectrale

Transformée et séries de Fourier

I- Introduction

Un signal peut se décomposer selon un très grand nombre de bases orthogonales ou non de la même manière qu'un vecteur peut se décomposer suivant les différentes bases associées aux coordonnées cartésiennes, sphériques, cylindriques, etc.

On choisit une décomposition du signal en éléments sinusoïdaux (des harmoniques) ($e^{j2\pi ft}$) parce que ces éléments sont des fonctions propres des filtres linéaires. Ces derniers préservent le contenu fréquentiel d'un signal. Lorsqu'un système calcule la transformée de Fourier (T.F.) d'un signal physique, il opère sur des signaux réels (seuls accessibles directement à la mesure) donc sans composante imaginaire. Les fréquences négatives sont obtenues par calcul du fait de la symétrie hermétique de la T.F.

Intérêt de la TF:

- Décomposition d'un signal quelconque sur une base orthogonale de signaux sinusoïdaux.
- Elle fournit des informations sur la distribution fréquentielle du signal.
- Elle facilite l'étude des systèmes linéaires répondant au principe de superposition.

II- Signaux périodiques

II-1. Représentation temporelle

On considère le signal sinusoïdal $s(t)$ qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} s(t) &= A \cos(2\pi f_0 t) \\ &= \frac{A}{2} [e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] \end{aligned}$$

t est la variable, A et f_0 sont les deux paramètres qui caractérisent complètement le signal.

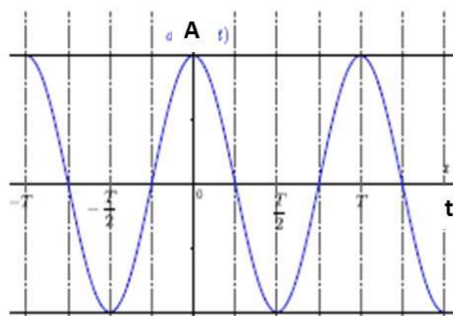


Figure 1

II-2. Représentation fréquentielle :

Dans le domaine fréquentiel, le signal $s(t)$ peut être représenté par le signal $S(f)$ dit spectre du signal $s(t)$:

$$S(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

f est la variable, A et f_0 sont les 2 paramètres qui caractérisent complètement le signal et δ : l'impulsion de Dirac (sera défini plus tard).

-Le spectre du signal $s(t)$ admet **deux représentations** : l'une dite **unilatérale** et l'autre dite **bilatérale**

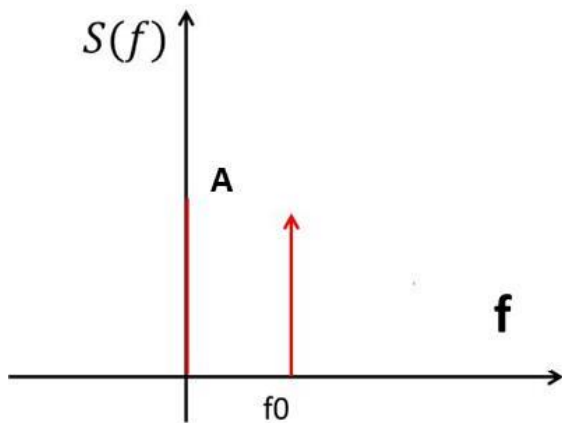


Figure 2 : Représentation unilatérale

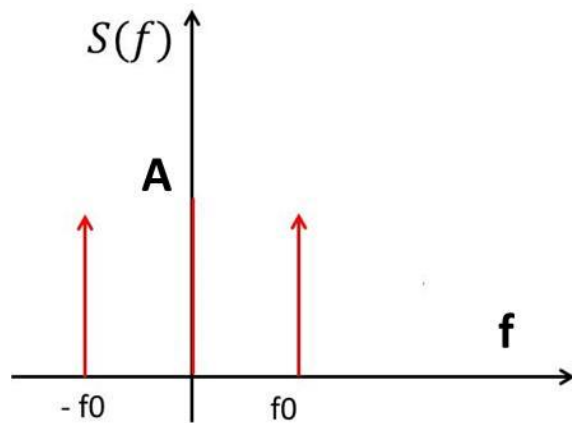


Figure 3 : Représentation bilatérale

II- 3. Décomposition en série de Fourier

II- 3.1. Décomposition en série de Fourier à coefficients réels

Théorème :

Tout signal $s_p(t)$ périodique de période T_0 c.à.d. [$\exists T_0$ tel que $s_p(t + T_0) = s_p(t)$], peut être décomposé en série de Fourier et peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales d'amplitudes différentes et de fréquences f multiples de la fréquence f_0 dite fréquence fondamentale ($f_0 = \frac{1}{T_0}$) c.à.d. :

$$s_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

Avec a_n et b_n les coefficients de la série de Fourier qui se calculent à partir des relations suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_p(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s_p(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s_p(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad \text{pour } n \geq 1$$

a_0 : valeur moyenne du signal $s_p(t)$ appelée aussi composante continue.

a_n et b_n : sont les coefficients réels de la série de Fourier ou coefficients trigonométriques

C'est le e théorème du mathématicien **Joseph Fourier (1768-1830)**.

Remarque : un signal périodique présente donc un spectre de raies.

II-3.2. Développement en cosinus

Le signal $s_p(t)$ peut aussi s'écrire sous la forme d'un développement de fonctions cosinus seulement en introduisant le déphasage φ_n tq :

$$s_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=+\infty} c_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n)$$

Avec $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\varphi_n = \text{Arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

Le spectre en fréquence du signal présente l'amplitude de la fréquence **fondamental** f_0 et des **différentes harmoniques** en fonction de la fréquence f ($f = n f_0$).

Remarque :

Un signal périodique présente donc un spectre discret composé de raies distantes de multiples de f_0 ($f = n f_0$) et d'amplitude c_n .

II-3.3. Développement sous forme complexe

Le signal $s_p(t)$ peut s'écrire aussi sous la forme exponentielle :

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nf_0) \exp(j 2 \pi n f_0 t)$$

Avec $s(nf_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_p(t) \exp(-j 2 \pi n f_0 t) dt$

$s(nf_0)$: sont les **coefficients complexes** de la série de Fourier.

$$s(nf_0) = \frac{1}{2} (a_n - j b_n); \quad S_0 = a_0 \quad \text{et} \quad j : \text{le nombre complexe tel que } j^2 = -1$$

- Si le signal $s(t)$ est réel comme c'est le cas pour les signaux physiques on a :

$$a_{-n} = a_n \quad \text{et} \quad b_{-n} = -b_n$$

$$|s(nf_0)| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{C_n}{2}$$

$$\varphi(nf_0) = \text{Arctg} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$$

- Le spectre $S_p(f)$ du signal $s_p(t)$ périodique de période $T_0 = 1/f_0$ peut être représenté par l'expression suivante :

$$S_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nf_0) \cdot \delta(f - n f_0)$$

Avec : $s(nf_0) = |s(nf_0)| [\exp[-j \varphi(nf_0)]]$

et δ représente la **distribution de Dirac** (dite aussi **impulsion** ou **pic de Dirac**) au point (nf_0) .

- Le spectre d'amplitude est :

$$|S_p(f)| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \cdot \delta(f - n f_0)$$

- Le spectre de phase est :

$$\varphi_{(nf_0)} = \text{Arctg} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$$

Exemples

1- Signal sinusoïdal $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

Le développement en série de Fourier du signal $s(t)$ est :

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_n = 0 \quad \text{pour} \quad n > 1 \quad \text{et} \quad b_n = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

donc :

$$\begin{aligned} s(f_0) &= \frac{1}{2} (a_1 - j \cdot b_1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(-f_0) &= \frac{1}{2} (a_{-1} - j \cdot b_{-1}) \\ &= \frac{1}{2} (a_1 + j \cdot b_1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc le spectre $S(f)$ du signal $s(t)$ est :

$$S(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

2- Signal sinusoïdal $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

- Le développement en série de Fourier est :

$$a_n = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq 0 \quad ; \quad b_1 = 1 \quad \text{et} \quad b_n = 0 \quad \text{pour} \quad n > 1$$

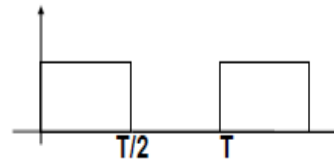
$$\begin{aligned} s(f_0) &= \frac{1}{2} (a_1 - j \cdot b_1) \\ &= \frac{-j}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(-f_0) &= \frac{1}{2} (a_{-1} - j \cdot b_{-1}) \\ &= \frac{1}{2} (a_1 + j \cdot b_1) \\ &= \frac{j}{2} \end{aligned}$$

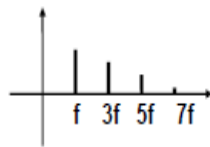
donc le spectre $S(f)$ du signal $s(t)$ est :

$$S(f) = \frac{j}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

Exemple, cas d'un signal carré :

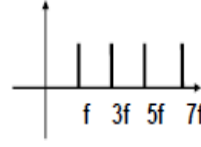


Spectre d'amplitude



$$a_0 = \frac{1}{2} \quad a_n = 0$$

Spectre de phase



$$\varphi_n = \text{Arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \quad \text{si } n \text{ impair} \quad b_n = 0 \quad \text{sin on}$$

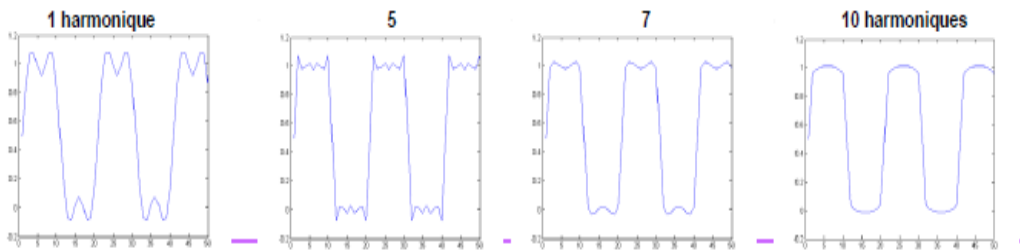


Figure 4

En analyse, les **séries de Fourier** sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.

Les quatre premières sommes partielles de la série de Fourier pour un signal carré.

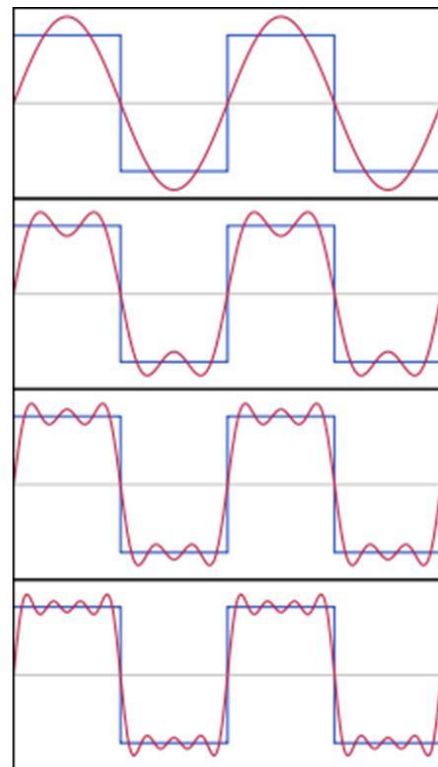


Figure 5

II-4 Théorème de Parseval:

La puissance d'un signal périodique calculée dans la représentation temporelle est égale à celle calculée dans la représentation fréquentielle.

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |s_p(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |S_n|^2$$

III- Transformée de Fourier d'un signal

III-1. Définition

Dans le cas d'un signal non périodique, on considère que le signal a une période T infinie. La fréquence tend donc vers zéro et le spectre devient une fonction continue et on substitue alors la somme intégrale c.à.d. \int à la somme discrète $\sum_{-\infty}^{+\infty}$

-La transformée de Fourier directe notée : TF (s(t)) ou S(f) du signal s(t) est définie par :

$$\text{TF}(s(t)) = S(f)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-j \cdot 2\pi f t) dt$$

-La transformée de Fourier inverse noté TF⁻¹ ou F⁻¹ est définie par :

$$\text{TF}^{-1}(S(f)) = s(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \exp(j \cdot 2\pi f t) df$$

-Le spectre du signal s(t) devient alors continu et complexe et comprend donc une partie réelle notée **Re (S(f))** et une partie imaginaire notée **Im (S(f))** :

$$\text{Re}(S(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi f t) dt ;$$

$$\text{Im}(S(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi f t) dt$$

$$|S(f)| = \sqrt{\text{Re}^2(S(f)) + \text{Im}^2(S(f))}$$

$$\text{et } \Phi(f) = \text{Arctg} \left(\frac{\text{Im}(S(f))}{\text{Re}(S(f))} \right)$$

III-2. Conditions d'existence de la transformée de Fourier d'un signal

Dans le cas d'un signal non périodique, on considère que le signal a une période T infinie.

- Si le signal satisfait les conditions suivantes :
 - Le signal $s(t)$ est une fonction bornée.
 - Les discontinuités et les extremums du signal $s(t)$ sont en nombre fini.
 - $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$ c-à-d fini.

Alors le signal admet une transformée de Fourier.

- Si $s(t)$ est un signal de carré sommable, alors $s(t)$ admet une transformée de Fourier TF.

III-3. Propriétés de la transformée de Fourier

Soient $s_1(t)$ et $s_2(t)$ deux signaux et $S_1(f)$ et $S_2(f)$ leurs transformées de Fourier directes (dits aussi spectres en fréquence).

1- Linéarité: $TF [\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)] = \alpha S_1(f) + \beta S_2(f)$

α et β sont des constantes

2- Translation, retard, décalage : $TF [s(t - \tau)] = \exp(-j 2\pi f \tau) \cdot S(f)$

3- Homothétie, dilatation, similitude: $TF [s(a t)] = \frac{1}{|a|} \cdot S\left(\frac{f}{a}\right)$;
 $a \in \mathbb{R}$

4- Dérivation : $TF \left[\frac{d^n s(t)}{dt^n} \right] = (j 2\pi f)^n \cdot S(f)$

5- Symétries : $TF [s(-t)] = TF [s(t)](-f) = S(-f)$

$$TF [s^*(t)] = S^*(-f)$$

6- Parité

$f(t)$		$F(\nu)$	
paire	réelle	paire	réelle
paire	imaginaire	paire	imaginaire
impaire	réelle	impaire	imaginaire
impaire	imaginaire	impaire	réelle

$f(t)$	$F(\nu)$
complexe et paire	
complexe et impaire	
réelle quelconque	
imaginaire quelconque	
partie réelle paire et partie imaginaire impaire	
partie réelle impaire et partie imaginaire paire	

7. Produit de convolution : $\text{TF} [s_1(t) * s_2(t)] = S_1(f) \cdot S_2(f)$

$$\text{TF} [s_1(t) \cdot s_2(t)] = S_1(f) * S_2(f)$$

IV- Produit de convolution

IV-1. Convolution en temps:

On appelle **produit de convolution noté** $*$ ou \times de 2 signaux d'énergie finies $s_1(t)$ et $s_2(t)$, le signal $z(t)$ défini par :

$$z(t) = s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau = s_2(t) * s_1(t)$$

- La transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ est le produit simple noté \cdot ou \times de leurs transformées de Fourier respectifs $S_1(f)$ et $S_2(f)$.

$$\text{TF}(z(t)) = Z(f) = S_1(f) \cdot S_2(f) = S_2(f) \cdot S_1(f)$$

-La propriété de convolution est fondamentale pour les applications de l'analyse de Fourier notamment pour le filtrage linéaire.

IV-2. Convolution en fréquence:

Si $z(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$ alors $\text{TF}(z(t)) = Z(f) = S_1(f) * S_2(f)$

Remarque : La transformée de Fourier transforme la convolution en produit simple.

IV-3. Théorème de Plancherel

Le théorème exprime la dualité temps–fréquence: la transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux est égal au produit simple de leur transformées de Fourier d'une part, et d'autre part, la transformée de Fourier d'un produit simple de deux signaux est égal au produit de convolution de leur transformées de Fourier.

$$\text{TF} [s_1(t) \cdot s_2(t)] = S_1(f) * S_2(f)$$

$$\text{TF} [s_1(t) * s_2(t)] = S_1(f) \cdot S_2(f)$$

V. Théorème de Parseval (conservation de l'énergie d'un signal)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

L'énergie d'un signal $s(t)$ calculée dans la représentation temporelle est égale à celle calculée dans la représentation fréquentielle.

VI. Transformée de Fourier multidimensionnelle

On peut étendre la définition de la transformée de Fourier à un signal $s(\vec{x})$ dans un espace de dimension n :

$$\text{TF} [s(\vec{x})] = F(\vec{u}) = \int \int s(\vec{x}) e^{-j2\pi\vec{u}\cdot\vec{x}} d\vec{x}$$

$$s(\vec{x}) = \text{TF}^{-1} [F(\vec{u})] = \int \int F(\vec{u}) e^{j2\pi\vec{u}\cdot\vec{x}} d\vec{u}$$

Cette généralisation est utilisée pour le traitement d'image.

VII- Distributions

4.2 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions test

Dans tout ce chapitre Ω désigne un ouvert non-vide de \mathbb{R}^n et \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 4.1. On note par $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ ou encore par $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ appartenant à $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ qui ont la propriété suivante : il existe un compact K inclus dans Ω , tel que φ s'annule sur $\Omega - K$ (donc $\varphi(x) = 0, \forall x \in \Omega - K$).

Remarque 4.1. 1. Dans la littérature sur le sujet il y a une autre définition de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$, utilisant la notion de **support** d'une fonction : le support c'est l'adhérence de l'ensemble où la fonction ne s'annule pas ; alors une fonction est dans $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ si elle est dans $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ et son support est compact et inclus dans Ω .

2. La propriété de l'existence d'un compact K inclus dans Ω en dehors duquel φ s'annule est non vérifiée dans le cas où il existe une suite $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ qui tend vers un élément de $\partial\Omega$ ou dont la norme tend vers $+\infty$, tel que $\varphi(x^{(k)}) \neq 0$.

3. Si $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ est un autre ouvert avec $\Omega_1 \subset \Omega$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ alors on dira par abus de langage que φ appartient (respectivement n'appartient pas) à $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K})$ si la restriction de φ à Ω_1 appartient (respectivement n'appartient pas) à $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K})$.

Dans ce cours nous allons considérer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. C'est pourquoi on utilisera les notations : $C_0^\infty(\Omega) = C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$.

4.3 La notion de distribution

Définition 4.2. On appelle **distribution** sur Ω une application **linéaire** de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} , c'est à dire, une application $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition :

$$T(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2) = \beta_1T(\varphi_1) + \beta_2T(\varphi_2), \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Remarque 4.3. 1. Dans ce cours on donne une définition simplifiée de la notion de distribution. En fait il y a encore une condition de continuité de T qui ne sera pas donnée ici.

2. On pourrait considérer $\mathcal{D}(\Omega, C)$ à la place de $\mathcal{D}(\Omega)$ et définir, pour plus de généralité, une distribution comme une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega, C)$ à valeurs dans C ; mais dans ce cours on travaillera toujours en \mathbb{R} .

Notation : On notera dans la suite par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble de toutes les distributions sur Ω . On dit aussi que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le **dual** de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Notation : On utilisera dans la suite la notation plus commode $\langle T, \varphi \rangle$ (crochet de dualité) au lieu de $T(\varphi)$, pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et tout élément $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (on appellera φ fonction test pour la distribution T).

Nous donnerons pour l'instant deux exemple fondamentaux des distributions. Le résultat suivant introduit les distributions du type Dirac.

Définition 4.3. Soit $a \in \Omega$ et considérons l'application $\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors δ_a est une distribution sur Ω appelée **distribution de Dirac en a sur Ω** .

VII.1. Définition

Les distributions sont définies dans l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R}^n indéfiniment dérivables et à support borné. Soit φ une fonction appartenant à l'ensemble des fonctions test et f une fonction sommable sur tout un ensemble borné, f définit une distribution D_f par la relation :

$$\langle D_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

Dérivation : $\langle \frac{\partial D}{\partial t}, \varphi \rangle = - \langle D, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle$

Transformée de Fourier : $\langle TFD, \varphi \rangle = \langle D, TF\varphi \rangle$

$$\langle TF\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, TF\varphi \rangle$$

VII-2. Distribution de Dirac :

$$\langle \delta(t), \varphi \rangle = \varphi(0)$$

$$\langle \delta(t-x), \varphi \rangle = \varphi(x)$$

$$TF(1) = \delta(f)$$

$$TF(\delta(t)) = 1$$

$$TF(\delta(t-t_0)) = \exp(-j2\pi f t_0)$$

$$TF(\exp(j2\pi f_0 t)) = \delta(f-f_0)$$

$$TF[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

$$TF[\sin(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$$

Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac en un point t_0 est définie par : $\delta(t-t_0)$, $t_0 > 0$.

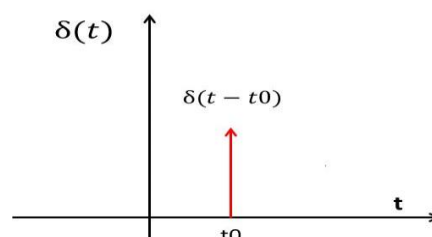


Figure 6

Peigne de Dirac :

On définit le Peigne de Dirac de période T par la fonction « shah : lettre de l'alphabet russe » :notée :

$$\mathbb{I}_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

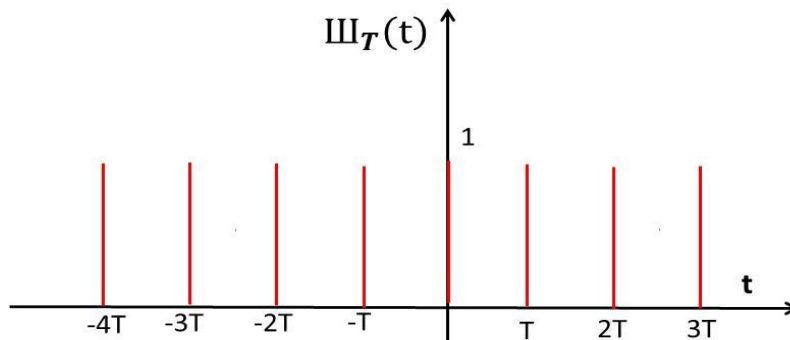


Figure 7

- Il s'agit d'une distribution infinie de Dirac de période T.
- Sa TF est appelée somme infinie d'exponentielle (ou exponentielles éternelles).

$$S(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n f T}$$

VIII- Transformée de Laplace

Pour un signal continu transitoire, pour que l'intégrale de Fourier d'un signal causal (i.e défini pour $t > 0$) converge, on multiplie $s(t)$ par $\exp(-pt)$.

Définition

On définit la transformée de Laplace $\mathcal{TL}[s(t)]$ noté $S(p)$ d'un signal $s(t)$ causal par :

$$\mathcal{TL}[s(t)] = S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) \exp(-pt) dt$$

Avec p un nombre complexe qui peut s'écrire $p = \sigma + j\omega$; σ et $\omega \in \mathbb{R}$

Remarque :

- La transformée de Laplace n'exploite que la partie du signal correspondant à $t > 0$.
- Généralement, la transformée de Laplace n'est utilisée que pour des signaux causaux.

$$f(t) = 0 \text{ pour } t \leq 0$$

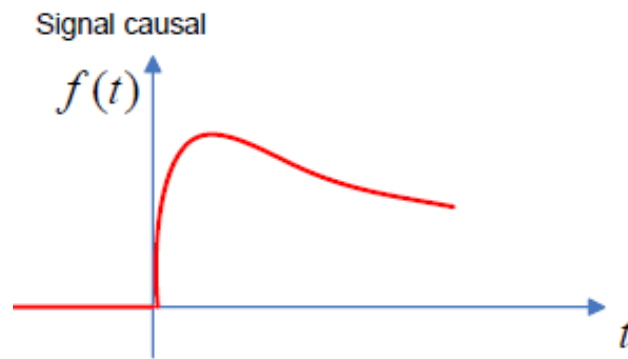


Figure 8

- Tous les signaux réels ont une transformation de Laplace.

Propriétés de la transformée de Laplace

- **Linéarité :** $TL [a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t)] = a \cdot S_1(p) + b \cdot S_2(p)$
- $TL [s(a.t)] = \frac{1}{|a|} \cdot S(p)$
- **Retard:** $TL [s(t - a)] = S(p) \cdot \exp(-ap)$
- **Convolution** $TL [s_1(t) * s_2(t)] = S_1(p) \cdot S_2(p)$ et réciproquement,

$$TL[s_1(t) \cdot s_2(t)] = S_1(p) * S_2(p)$$

- **Dérivation :**

$$L \left[\frac{ds(t)}{dt} \right] = p \cdot S(p)$$

- **Intégration :**

$$L \left[\int s(t) dt \right] = \frac{1}{p} \cdot S(p)$$

Transformées usuelles de Laplace

<i>Image symbolique</i>	<i>Image temporelle de fonctions causales</i>
$\frac{1}{p}$	Échelon : $r(t)$
1	Dirac : $\delta(t)$
$\frac{1}{p^2}$	Rampe : $t \cdot r(t)$
$\frac{1}{p+a}$	$r(t)e^{-at}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$r(t)\sin(\omega t)$
$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$r(t)\sinh(\omega t)$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$r(t)e^{-at}\sin(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$r(t)\cos(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$r(t)\cosh(\omega t)$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$r(t)e^{-at}\cos(\omega t)$
$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$r(t)t^n$
$\frac{1}{p(1+p)}$	$r(t)\left(1 - e^{-t}\right)$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$r(t)t e^{-at}$



Jean Baptiste Joseph Fourier
mathématicien et physicien
français (1768-1830)



Oliver Heaviside, électricien
anglais (1850-1925)



Pierre-Simon Laplace,
mathématicien français
(1749-1827).



Joseph FOURIER 1768 - 1830

Mathématicien et physicien français

Jean-Baptiste-Joseph, baron Fourier, mathématicien, est né à Auxerre, le 21 mars 1768 II
est mort à Paris, le 16 mai 1830

Fin du cours