Département de Physique **A.U. : 2019-2020**

TD de Traitement du signal
TD N° 4
Signaux aléatoires

Exercice 1 : (Examen juin 2015)

On considère **x(t),** un processus stochastique stationnaire au sens large de moyenne nulle et de fonction de corrélation **Rxx (τ)** et soit le signal **y(t) défini par : y(t) = x(t) + A t**,

A : une variable aléatoire de moyenne nulle, de variance égale à 1 et indépendante de **x(t).**

1- Calculer la moyenne **E[y(t)]** et la fonction de corrélation **Ryy (t + τ, t)** de **y(t).**

2-y(t) est-il stationnaire au sens large?

3- Calculer la fonction d'inter-corrélation **Rxy(t + τ, t**) entre **x(t + τ)** et **y(t).**

Exercice 2: (Examen janvier 2014)

A l'entrée d'un filtre linéaire invariant dans le temps et de réponse impulsionnelle **h(t)**, on applique un signal aléatoire : **e (t) = x (t) + b (t)**

x (t) = λ cos (2 π f_0 **t)** ;λ **et** f_0 des constantes et **b (t)** : un bruit blanc stationnaire de densité spectrale de puissance $\boldsymbol{\sigma_b^2}$;

h (t) = exp (- a t) U(t) ; a>0 et U **(t)** : la fonction échelon unité.

1- Calculer la T.F de h(t) notée **H(f)**. Que représente-t-elle?

2- Déterminer la puissance du signal g_b **(t)** défini par g_b **(t) = b (t) * h (t)** qu'on notera P_{g_b}

3- Déterminer le spectre du signal filtré défini par : g_x **(t) = x (t) * h (t)**
On mettra **H(f)** sous la forme **H(f) = A (f) exp [jΦ(f)].**

4- En déduire l'expression du signal g_x **(t)** etsa puissance qu'on notera P_{g_x}.

5- En déduire le rapport signal-bruit du signal filtré défini par : **RSB** $= \dfrac{P_{g_x}}{P_{g_b}}$

N.B : * désigne l'opérateur de convolution ; $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$ et **DSP [**g_b**(t)] =** σ_b^2 **|H(f) |**^{2}

Exercice 3 :

On considère le signal **s(t) = x(t) + A cos (2π** f_0 **t)** avec **x(t)** un bruit stationnaire de moyenne nulle et **A cos (2π** f_0 **t)** un signal déterministe.

1- Montrer que **s(t)** n'est pas stationnaire et calculer sa puissance instantanée moyenne.

2- Calculer la puissance moyenne temporelle de **s(t)** et la comparer avec celle obtenue en 1.

3- Calculer la fonction d'autocorrélation du signal **s(t)** puis sa valeur moyenne temporelle.

4- Etudier la densité spectrale de **s(t).**

5- Si **x(t)** est un bruit gaussien, donner l'allure de la densité spectrale associée à **y(t).**

Exercice 4 :

On considère le signal sinusoïdal bruité : $\mathbf{s(t) = \cos(w_0 t + \theta) + b(t)}$transmis à travers un filtre linéaire de réponse fréquentielle : $\mathbf{H(\omega) = \frac{R/L}{j\omega + R/L}}$, où $\mathbf{b(t)}$ est un bruit de moyenne nulle et de fonction de corrélation :$\mathbf{R_b(\tau) = K\,\delta(\tau)}$.

$\mathbf{w_0}$ est une constante et $\boldsymbol{\theta}$ une variable aléatoire uniformément distribuée sur $\mathbf{]\pi\ ,\ 2\pi[}$; $\mathbf{b(t)}$et$\boldsymbol{\theta}$sont indépendants.

1- Calculer la moyenne $\mathbf{E(s(t))}$ de $\mathbf{s(t)}$.

2- Calculer la fonction de corrélation $\mathbf{R_{ss}(t + \tau, t)}$ **de** $\mathbf{s(t)}$.

3-s(t) est-il stationnaire au sens large?

4-b(t) est-il stationnaire au sens large?

5- Calculer la moyenne $\mathbf{E(y(t))}$ de la sortie y(t) du filtre quand on applique s(t).

Nota : on donne primitive de $\mathbf{e^{ax}\ \sin w_0 x}$ est : $\mathbf{\frac{e^{ax}}{a^2 + w_0^2}\,[\,a\ \sin w_0 x - w_0\ \cos w_0 x\,]}$

6- Calculer la densité spectrale de puissance de **b(t).**

Exercice 5 :(Examen de rattrapage Fevrier 2014)

Dans une chaine de télécommunication, le canal de transmission est modélisé par l'addition au signal transmis d'un bruit **b(t)** suivi d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure F_c comme représenté par la figure 1. Le bruit est un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale de puissance **B** et indépendant du signal transmis. Le signal reçu est noté **r(t).**

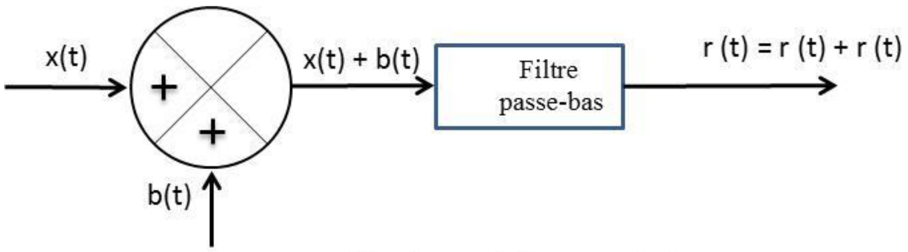
1- Théoriquement pour transmettre le signal sans démonstration, quelle devrait être la fréquence de coupure du filtre modélisant le canal ?

2- En pratique $F_c = 2/T$, déterminer l'expression de **r(t)** en fonction du signal transmis x(t), du bruit b(t) et de la réponse impulsionnelle du filtre **h(t).**

3- En déduire l'expression de la fonction d'autocorrélation du signal reçu, $\mathbf{C_{rr}(\tau)}$ en fonction des fonctions d'autocorrélation du signal reçu et du bruit reçu, respectivement $\mathbf{C_{rx}(\tau)}$ et$\mathbf{C_{rb}(\tau)}$

4- Déterminer l'expression de la densité spectrale de puissance, **Sr(f)** du signal reçu et la représenter.

5- Déterminer le rapport signal sur bruit avant et après la transmission ; le signal étant le signal quantifié (non prise en compte de l'erreur de quantification).



Modèle du canal de transmission

Figure 1