Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
SMA Semestre VI
Distributions

Correction de l'exercice 1 de la série N^0 3

Exercice 1. Soit f une fonction réelle de la variable réelle de classe $\mathcal{C}^n$. On pose pour tout $x \in I\!R$, $u(x) = |x| f(x)$.

Q1. Justifier le fait que l'on peut associer à u une distribution régulière Λ_u.

R1. Comme u est le produit de deux fonctions continues, elle est continue dans $I\!R$ et ceci implique qu'elle est localement intégrable dans $I\!R$.

Notons Λ_u la distribution associée à la fonction localement intégrable u.

Q2. Calculer la dérivée n^{ieme} de la distribution Λ_u.

R2. Remarquons d'abord que la fonction u est dérivable en tout point $x \neq 0$. donc, elle est presque partout dérivable dans $I\!R$ et on a pour tout $x \neq 0$

$$u'(x) = \operatorname{sgn}(x) f(x) + |x| f'(x),$$

où

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Comme la fonction u' est localement intégrable (pourquoi?), on obtient que

$$\Lambda'_u = \Lambda_{u'} = \Lambda_{\operatorname{sgn}(x) f} + \Lambda_{|x| f'}.$$

Calculons maintenant Λ''_u.
D'abord on a :

$$\Lambda''_u = (\Lambda_{\operatorname{sgn}(x) f} + \Lambda_{|x| f'})' = \Lambda'_{\operatorname{sgn}(x) f} + \Lambda'_{|x| f'}$$

et comme la fonction $x \mapsto |x| f'(x)$ est presque partout dérivable, que pour tout $x \neq 0$ sa dérivée est donnée par

$$x \mapsto \operatorname{sgn}(x) f'(x) + |x| f''(x)$$

et que cette dernière fonction est localement intégrable (somme de deux fonctions localement intégrable), on obtient

$$\Lambda'_{|x| f'} = \Lambda_{\operatorname{sgn}(x) f} + \Lambda_{|x| f''}.$$

Ensuite, il faut calculer $\Lambda'_{\operatorname{sgn}(x) f}$. Pour cela, soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$. On a

$$< \Lambda'_{\operatorname{sgn}(x) f}, \varphi > = - < \Lambda_{\operatorname{sgn}(x) f}, \varphi' >$$

et

$$< \Lambda_{\operatorname{sgn}(x) f}, \varphi' > = - \int_{-\infty}^0 f(x) \varphi'(x) \mathrm{d}x + \int_0^\infty f(x) \varphi'(x) \mathrm{d}x = -2 f(0) \varphi(0) = < 2 f(0) \delta, \varphi > .$$

Comme φ est quelconque dans les dernières égalités, on obtient que $\Lambda'_{\mathrm{sgn}(x)f} = 2f(0)\delta$. Il en résulte que l'on a :

$$\Lambda''_u = \Lambda_{|x|f''} + 2\Lambda_{\mathrm{sgn}f'} + 2f(0)\delta.$$

Pour calculer $\Lambda^{(3)}_u$, nous allons utiliser les calculs faits précédemment.

(a) $\Lambda'_{|x|f''}$?

D'après les calculs fait pour $n = 1$, si ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $x \mapsto |x|\psi(x)$ est localement intégrable ainsi que sa dérivée qui existe sur $I\!R^*$...et on a :

$$\Lambda'_{|x|\psi} = \Lambda_{\mathrm{sgn}(x)\psi} + \Lambda_{|x|\psi'}.$$

$\Lambda'_{|x|f''} = \Lambda_{\mathrm{sgn}(x)f''} + \Lambda_{|x|f''}$

(b) $\Lambda_{\mathrm{sgn}(x)f'}$?

Lemme. *Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans $I\!R^*$ telle que ses limites à gauche et à droite en zéro existent et ψ' localement intégrable dans $I\!R$, alors ψ est localement intégrable et on a :*

$$\Lambda'_\psi = \Lambda_{\psi'} + (\lim_{x\to 0+} \psi(x) - \lim_{x\to 0^-} \psi(x))\delta$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction $x \mapsto \mathrm{sgn}(x)f'(x)$ vérifie les hypothèses du lemme précédent et si $x \neq 0$ $(\mathrm{sgn}(x)f')'(x) = \mathrm{sgn}(x)f''(x)$, donc,

$$\Lambda'_{\mathrm{sgn}(x)f'} = \Lambda_{\mathrm{sgn}(x)f''} + 2f(0)\delta.$$

(c) La dérivée de la distribution $2f(0)\delta$ est $2f(0)\delta'$. Il en résulte que l'on a :

$$\Lambda^{(3)}_u = \Lambda_{|x|f^{(3)}} + 3\Lambda_{\mathrm{sgn}f^{(2)}} + 2(f(0)\delta' + 2f'(0)\delta)$$

Pour les cracks en calcul, une récurrence donne pour tout $n \geq 2$

$$\Lambda^{(n)}_u = \Lambda_{|x|f^{(n)}} + n\Lambda_{\mathrm{sgn}f^{(n-1)}} + 2\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)f^k(0)\delta^{(n-k-2)}.$$