Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
SMA Semestre VI
Distributions

Série N^0 3

Exercice 1. Soit f une fonction réelle de la variable réelle de classe $\mathcal{C}^n$. On pose pour tout $x \in I\!R$, $u(x) = |x|f(x)$.

1. justifier le fait que l'on peut associer à u une distribution régulière Λ_u.
2. Calculer la dérivée n^{ieme} de la distribution Λ_u.

Exercice 2. Soient Ω un ouvert non vide de $I\!R^d$, $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

1. Montrer que $\psi\Lambda_f = \Lambda_{\psi f}$.
2. Soient $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Montrer que pour tout multi-indice α, on a la formule de Leibnitz suivante :
$$\partial^\alpha(\psi T) = \sum_{\beta\le\alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \partial^{\alpha-\beta}\psi\partial^\beta T,$$

Exercice 3. Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$. Résoudre dans $\mathcal{D}'(I\!R)$ l'équation
$$xT = \Lambda_\psi.$$

Exercice 4.

1. Calculer la dérivée (au sens des distributions) de $\mathrm{Vp}(\dfrac{1}{x})$.
2. Soient f et g deux fonctions continues dans $I\!R$, on suppose que $\Lambda'_f = \Lambda_g$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Résoudre dans $\mathscr{D}'(I\!R)$ les équations suivantes :
   (a) $xT = 1$.
   (b) $xS =\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$.

Exercice 5. Soient $T \in \mathscr{D}'(I\!R^d)$, $a \in I\!R^d$ et $m \in I\!N$. Démontrer que l'on a :
$$(x-a)^\beta T = 0$$
pour tout multi-indice β de longueur $m+1$ si, et seuleument si, T est de la forme suivante:
$$< T, \varphi >= \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(a)$$
pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(I\!R^d)$, où $(x-a)^\alpha$ représente le produit $(x_1-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x_d-a_d)^{\alpha_d}$.