Solution de la série 4

Exercice 1

1- La distribution est invariante par rotation autour de l'axe Oz. En coordonnées sphériques (r, θ, φ), cela signifie que le champ et potentiel ne dépendent pas de φ. On se place dans tout plan méridien (φ = cste) et on utilise les coordonnées polaires (r, θ).

De plus, tout plan contenant l'axe (O, e_φ) est un plan de symétrie de la distribution ⇒ le champ électrique est contenu dans ce plan ⇒ $\vec{E} = E_r\,\vec{u_r} + E_\theta\,\vec{u_\theta}$ et $E_\varphi = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = E_r\,\vec{u_r} + E_\theta\,\vec{u_\theta}$$

2- Le potentiel crée au point M(r, θ) par le dipôle s'écrit :

$$V(M) = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 PM} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 NM} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)$$

Or (Cf. cours) !

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{NM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow \quad V(M) = \frac{q(2a)\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}.\vec{e_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = 2a\,q\,\vec{e_z}$$

3- Le champ se déduit de la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$

En coordonnées polaires :

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad ; \quad E_\theta = -\frac{dV}{d\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right)$$

Calculons : $3(\vec{p}.\vec{e_r})\vec{e_r} - \vec{p} = 3p\cos\theta\,\vec{e_r} - p\,(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})$ avec $\vec{e_z} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$$\Rightarrow 3(\vec{p}.\vec{e_r})\vec{e_r} - \vec{p} = p(2\cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta})$$

D'où :
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}.\vec{e_r})\vec{e_r} - \vec{p}\right]$$

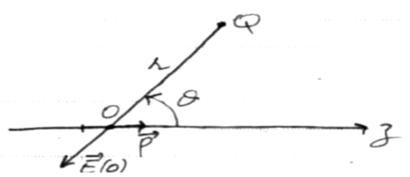
Application

1- Les liaisons $C^{\delta-} \leftarrow H^{\delta+}$ et $C^{\delta+} \Rightarrow O^{\delta-}$ sont polarisées ⇒ le moment dipolaire résultant est : $\vec{p} = \sum_i \vec{p_i} = p_{CO} + 2p_{CH}\cos\frac{116°}{2}$ AN : p = 2.72 D

2- L'énergie potentielle de l'ion (Q = + e) placé dans le champ de la molécule polaire

$$E_p = QV(r,\theta) = \frac{Qp\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

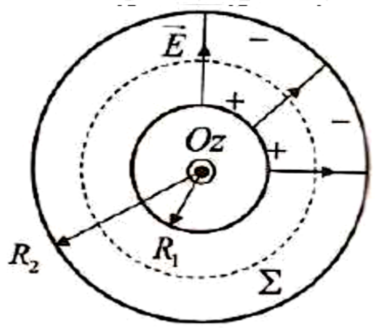
L'énergie potentielle du dipôle dans le champ extérieur est : $E_p = -\vec{p}.\vec{E}(0) = \frac{Qp\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$



⇒ Le dipole s'oriente selon le champ $(-\vec{e_r})$, puis se déplace vers les champs plus intenses, c'est-à-dire se rapproche de la charge Q.

Exercice 2

Soit V_1 le potentiel de C_1 et V_2 le potentiel de C_2 (les deux conducteurs sont équipotentiels).
La géométrie et les propriétés de symétrie du système conduisent à des surfaces équipotentielles qui sont des cylindres d'axe Oz et de rayon compris entre R_1 et R_2, et un champ électrique radial, dirigé comme sur la figure de C_1 vers C_2 si $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$ (soit $V_1 > V_2$).



Orientation du champ électrique

Avec $\vec{E} = E(r)\overrightarrow{u_r}$, le théorème de Gauss à travers le cylindre équipotentiel Σ de rayon r (fermé sur les bases où le flux du champ est nul) s'écrit :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 + \iint_{S_{latt}} E(r).dS = E(r).2\pi rh = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

D'où $\qquad \vec{E}(M) = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 rh}\overrightarrow{u_r}$

Ce champ est inhomogène entre les deux armatures (il décroît lorsque r augmente, ce qui est conforme au fait que les lignes de champ s'écartent).
Alors $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ conduit à $\frac{dV}{dr} = -\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 rh}$ soit par intégration et en traduisant la condition en $r = R_1$: $\qquad V(M) = V_1 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 \cdot h} ln\frac{r}{R_1}$

Remarque : l'utilisation simultanée des équations de MAXWELL-GAUSS et MAXWELL FARADAY sous la forme de l'équation de Poisson, soit en l'absence de charges d'espace et en coordonnée cylindriques $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$, donne directement la dépendance $V(r)$.
La différence de potentiel entre les deux armatures est alors :

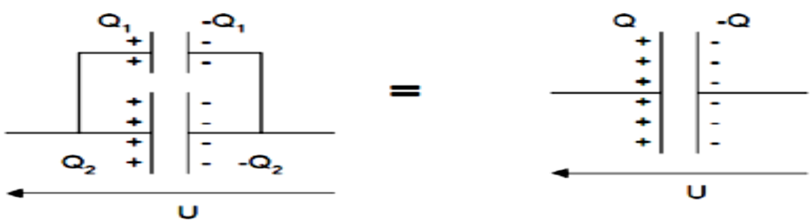
$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 \cdot h} ln\frac{R_2}{R_1}$$

La capacité C est le rapport de la charge de l'armature positive $Q_1 = +Q$ à la différence de potentiel positive entre les deux armatures $V_1 - V_2$ (de manière générale $Q = CV$), soit ici :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \cdot h}{ln\frac{R_2}{R_1}}$$

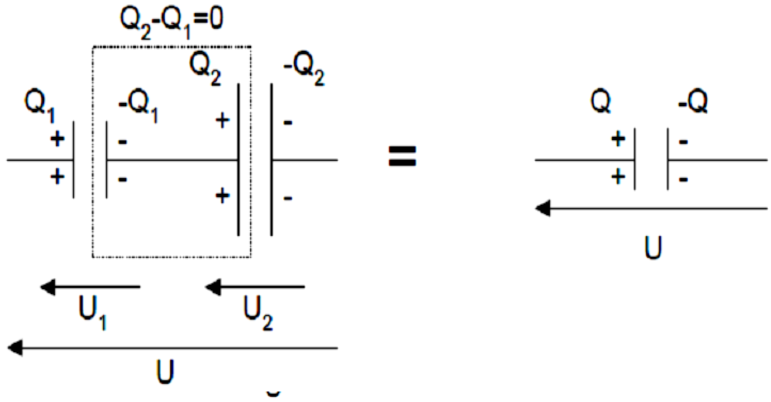
Ce résultat est bien homogène à $\varepsilon_0 \times$longueur, et la capacité C est d'autant plus importante que la hauteur h est grande et que les armatures sont proches ($R_2 \to R_1$).

Exercice 3



$Q_1 = C_1U$
$Q_2 = C_2U$
$Q = C_{éq}U$

Il y a conservation de la charge : $Q = Q_1 + Q_2$
Donc : $C_{éq} = C_1 + C_2$

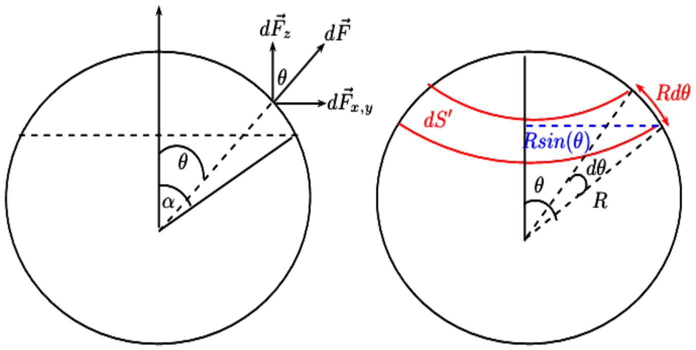


En série, tous les condensateurs ont la même charge : $Q = Q_1 = Q_2$
$U = U_1 + U_2$

$$\frac{Q}{C_{éq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

<u>Exercice 4</u>



Le champ juste à l'extérieur d'un conducteur (normal à la surface) est $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Dans la surface chargée, le champ moyen est $E_m = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. La force appliquée à dq est $dF = dqE_m$. A cause de la symétrie, on calcule la composante sur Oz uniquement $dF_z = dF\cos\theta = dq\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\cos\theta$. Les charges qui se trouvent sur la surface dS' de la couronne comprise entre θ et $\theta + d\theta$ donnent la même valeur de dF_z. Par conséquent, on choisit $dq = \sigma dS'$ où $dS' = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ (comme pour un cylindre de hauteur $Rd\theta$ et de rayon $R\sin\theta$). Alors, $F_{1z} = \int dF_z = \int_0^\alpha \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\sigma^2\pi R^2}{2\epsilon_0}\sin^2\alpha$. Le potentiel d'un conducteur sphérique est $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$, donc $F_{1z} = \frac{1}{2}\pi\epsilon_0 V^2 \sin^2\alpha$. La force appliquée à toute la sphère est nulle (symétrie), par conséquent $F_{2z} = -F_{1z}$.

Remarque : En coordonnées sphériques, la méthode générale est de choisir $dq = \sigma dS$ où $dS = R^2 d\Omega = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Ainsi,

$$F_{1z} = \int_0^\alpha d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} R^2 \sin\theta\cos\theta$$

On obtient le même résultat car l'intégrant ne dépend pas de φ de sorte que $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$.

Exercice 5

1. $U = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$. Pour un conducteur sphérique $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \implies C = 4\pi\epsilon_0 a$. D'où $U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$.
2. Cette énergie se dissipe entièrement sous forme de chaleur par effet Joule.
3. Le générateur a fourni l'énergie $W_0 = QV$. On retrouve la moitié sous forme d'énergie potentielle $U = \frac{1}{2}QV$. L'autre moitié a été perdue sous forme de chaleur durant la charge.

Exercice 6

1. Influence totale $q_{1A} = -q_{1B}$, Conservation des charges $q_{1A} + q_{2A} = Q_A$, $q_{1B} + q_{2B} = Q_B$.
2. A droite de S, on a $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2S\varepsilon_0}$. A gauche, on a $E = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{-q}{2S\varepsilon_0}$.
3. $E_A = \frac{q_{2A}-q_{1A}-q_{1B}-q_{2B}}{2S\varepsilon_0}$. Donc $E_A = \frac{Q_A-2q_{1A}-Q_B}{2S\varepsilon_0}$.
4. $E_A = 0 \implies q_{2A} - q_{1A} - Q_B = 0$, or $q_{1A} + q_{2A} = Q_A$. Donc $q_{1A} = \frac{Q_A-Q_B}{2} = 4\,\mu\text{C}$, $q_{2A} = \frac{Q_A+Q_B}{2} = 2\,\mu\text{C}$.
$q_{1B} = -q_{1A} = \frac{Q_B-Q_A}{2} = -4\,\mu\text{C}$, $q_{2B} = Q_B - q_{1B} = \frac{Q_A+Q_B}{2} = 2\,\mu\text{C}$.
5. $E_B = \frac{q_{1B}-q_{2B}+q_{1A}+q_{2A}}{2S\varepsilon_0}$, $E_B = \frac{2q_{1B}-Q_B+Q_A}{2S\varepsilon_0} = 0\,\text{V/m}$.
6. Entre les deux conducteurs,$E = \frac{Q_A-Q_B}{2S\varepsilon_0}$ et $V_A - V_B = \frac{Q_A-Q_B}{2S\varepsilon_0}d = 36\,\text{V}$.

Exercice 7

1) Pour que la charge soit uniformément répartie sur la surface. il faut que cette dernière soit dépourvue de pointes et d'aspérités (voir pouvoir des pointes dans le cours). Cette charge est négative et répartie en surface.

2-a) Le conducteur A de charge Q crée un champ en son voisinage. Quand le conducteur neutre B est à une distance d de A, il ressent ce champ et ses charges positives $+|q|$ sont attirées par les charges négatives de A, alors que les charges négatives $-|q|$ sont repoussées (B reste neutre $+|q| - |q| = 0$). Les charges $+|q|$ de B créent un champs dans A plus grand que celui créé par les chargent $-|q|$, modifient le potentiel de A et attirent plus de charges négatives de A. Ces charges sont fournies par le générateur qui les transfère de la terre vers A pour garder le même potentiel V. La charge de A devient Q' avec $|Q'| > |Q|$. En chaque point de l'espace (y compris les conducteurs), le champ est la somme des champs créés par Q', $+|q|$ et $-|q|$: $\vec{E} = \vec{E}_{Q'} + \vec{E}_{+|q|} + \vec{E}_{-|q|}$. Ce processus de répartition des charges dans A et B s'arrête quand le champ $\vec{E}$ devient nul à l'intérieur de chaque conducteur qui sera donc en équilibre.

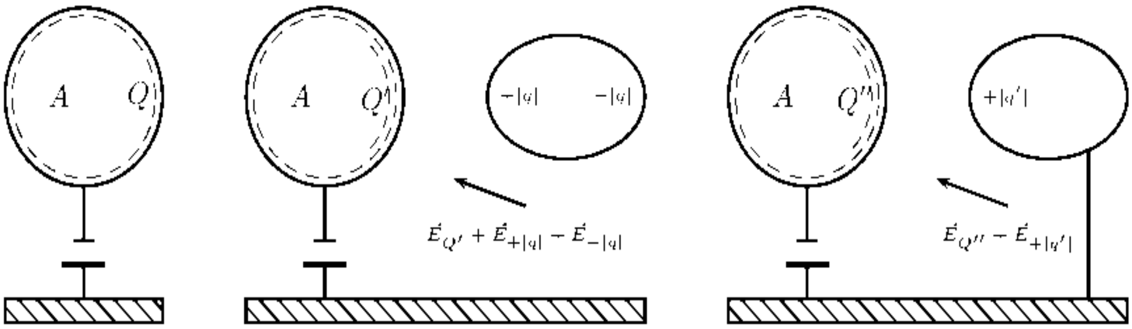


figure (a) figure (b) figure (c)

2-b) Si B est à l'infini, rien ne se passe car B ne ressent pas le champ créé par A (l'infini correspond en fait à une distance pour laquelle le champ créé par A est négligeable).

2-c) Si B est relié à la terre tout en étant à une distance d, ses charges négatives sur le côté opposé à A passent à la terre et le champ dans A augmente, ce qui nécessite d'avantage de charges négatives fournies par le générateur. La charge de A devient Q''.

En résumé, bien que le potentiel de A soit constant, sa charge augmente à cause du rapprochement de B puis augmente encore à cause du lieu de B avec la terre ($|Q''| > |Q'| > |Q|$). La capacité de A a donc augmenté par influence de B.

3-a) $Q_0 = V_A C$ et $V_A = V$. Pour une sphère, $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V$ et $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ (voir le cours pour les détails).

3-b) C'est le cas d'une influence totale avec conservation de la charge de B qui est neutre, les relations du cours sont applicables : $Q_1 = -Q_2 = Q_3$. Pour calculer Q_1, il faut la lier au potentiel V_A (la seul donnée que l'on a). Le théorème de Gauss nous permet de calculer le champ en fonction de Q_1 puis l'intégrale du champ nous permettra alors de déduire le potentiel en fonction de Q_1.

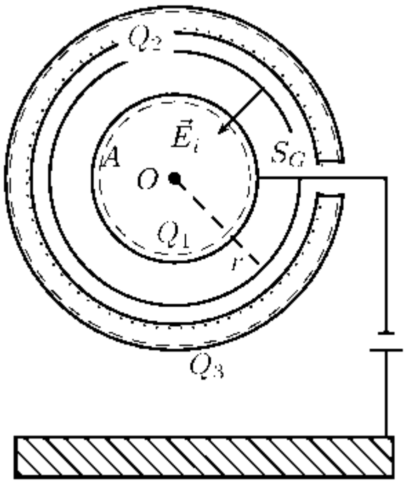


figure (e)

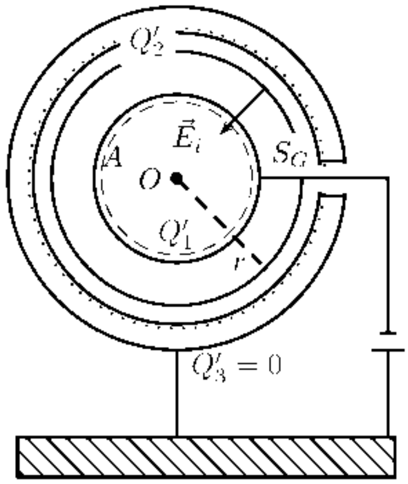


figure (f)

Calcul du champ : Par application du théorème de Gauss on détermine que le champ (radial à cause de la symétrie) vérifie : $E4\pi r^2 = Q_{int}/\varepsilon_0$ où r est le rayon de la surface de Gauss.

Pour $r > R_3$, on a $E = E_e$ et $Q_{int} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_1$ de sorte que $E_e = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$.

Pour $R_3 > r > R_2$, c'est l'intérieur du conducteur B et donc $E = 0$ (c'est ce qui nous a permis d'écrire $Q_1 = -Q_2$ car dans ce cas $Q_{int} = Q_1 + Q_2 = 0$).
Pour $R_2 > r > R_1$, on a $E = E_i$ et $Q_{int} = Q_1$ de sorte que $E_i = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$.
Pour $r < R_1$, c'est l'intérieur du conducteur A et donc $E = 0$.
Calcul du potentiel : $dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -Edr$ (car $\vec{E} = E\vec{u}_r$). Par conséquent, $V(r) = -\int Edr$.
Pour $r > R_3$, on a $V(r) = V_e(r) = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r + C_e = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r$ (on choisit $C_e = 0$ car $V_e(\infty) = 0$)
Pour $R_3 > r > R_2$, on a $V(r) = V_B(r) = V_B$ (potentiel constant à l'intérieur de B). La continuité du potentiel en R_3 s'écrit $V_B(R_3) = V_e(R_3) \Rightarrow V_B = Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_3$.
Pour $R_2 > r > R_1$, on a $V(r) = V_i(r) = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r + C_i$. La continuité en R_2 donne $V_i(R_2) = V_B(R_2) \Rightarrow Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_2 + C_i = Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_3$. Par conséquent, $V_i = (Q_1/4\pi\varepsilon_0)[1/r + (1/R_3 - 1/R_2)]$
Pour $r < R_1$, c'est l'intérieur de A et

$$V(r) = V_A = V_i(R_1) = (Q_1/4\pi\varepsilon_0)[1/R_1 + 1/R_3 - 1/R_2]$$

Ainsi,

$$Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 + 1/R_3 - 1/R_2]$$

3-c) Le conducteur B et le sol constituent un seul conducteur ($V_B = 0$) et la charge à la surface externe de B passe au sol ($Q_3' = 0$). Le même raisonnement conduit à :
Pour $r > R_3$, on a $E_e = 0$ car $Q_{int} = Q_1' + Q_2' + Q_3' = Q_1' + Q_2' = 0$. Par conséquent, $V_e(r) = C_e$ comme $V_e(\infty) = 0$ (ou bien par continuité en R_3, $V_e(R_3) = V_B = 0$), alors $C_e = 0$.
Pour $R_2 > r > R_1$, on a $E_i = Q_1'/4\pi\varepsilon_0 r^2$ et $V(r) = V_i = Q_1'/4\pi\varepsilon_0 r + C_i$. La continuité en R_2 donne $V_i(R_2) = V_B \Rightarrow Q_1'/4\pi\varepsilon_0 R_2 + C_i = 0$ ce qui permet de déduire $V_i = (Q_1'/4\pi\varepsilon_0)[1/r - 1/R_2]$.
Pour $r < R_1$, c'est l'intérieur de A et

$$V(r) = V_A = V_i(R_1) = (Q_1'/4\pi\varepsilon_0)[1/R_1 - 1/R_2]$$

Ainsi

$$Q_1' = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 - 1/R_2]$$

d) Réécrivons $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/(1/R_1)$, $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 - (1/R_2 - 1/R_3)]$ et $Q_1' = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 - 1/R_2]$.
Comme $1/R_2 >$
$(1/R_2 - 1/R_3) > 0$, on voit facilement que $|Q_1'| > |Q_1| > |Q_0|$ (on compare les valeurs absolues car V_A est négatif et donc les charges aussi). Pour augmenter Q_1', il faut diminuer R_2 (Rapprocher les conducteurs A et B formant le condensateur).
Remarque : la capacité dans le cas (f) est $C = 4\pi\varepsilon_0/[1/R_1 - 1/R_2] = 4\pi\varepsilon_0(R_1R_2)/[R_2 - R_1]$. On peut retrouver la capacité du condensateur plan comme limite où $d = R_2 - R_1 << R_1 \Rightarrow (R_1R_2) \approx R_1^2 \Rightarrow C \approx$

$4\pi\varepsilon_0 R_1^2/d = \varepsilon_0 S/d$.
e) Figure e : A et B constitueront un seul conducteur de potentiel V et de charge $Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 V R_3$ répartie sur la surface externe de B. La charge Q_1 passe de A vers B et la charge $Q_2 - Q_1$ fournie par le générateur passe de la terre vers B). L'énergie libérée est $\Delta U = U_f - U_i$ avec $U_f = Q_2V/2$ et $U_i = Q_1V/2$ donc $\Delta U = (Q_2 - Q_1)V/2$. On voit maintenant que c'est $(Q_2 - Q_1)$ qui a réellement circulé (en subissant une variation de potentiel). Le générateur a fourni $(Q_2 - Q_1)V$ dont la moitié a été dissipée sous forme de chaleur.

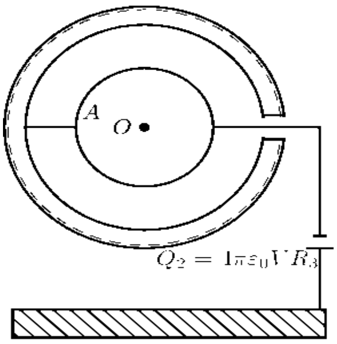


figure (e)

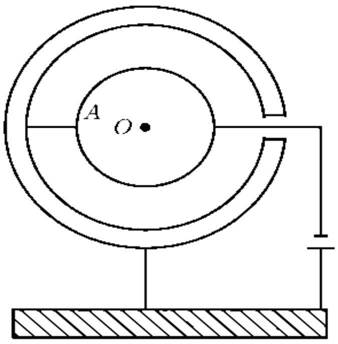


figure (f)

Figure f : Premier cas (A est isolé du générateur avant de le relier à B) : Après l'isolement, $V = V_A$ et rien ne change. Après le lien entre A et B, toute la charge Q_1' circule de A vers B pour neutraliser la charge $Q_2' = -Q_1'$. La charge et le potentiel deviennent nuls à la fin. Comme le potentiel de B était déjà nul, on a $U_i = (1/2)\,Q_1'V_A + (1/2)\,Q_2'V_B = (1/2)\,Q_1'V$ et $U_f = 0$. Donc $\Delta U = -\,(1/2)\,Q_1'V$. Elle est libérée sous forme chaleur (effet Joule).

Deuxième cas (A reste lié au générateur) : Si le générateur est idéal (fournit un potentiel constant V), la charge circulerait en permanence dans le circuit fermé terre, générateur, A et B. L'équilibre n'est jamais atteint ce qui ne correspond pas aux conditions de ce cours. Par contre, un générateur réel s'épuise et tous les potentiels et toutes les charges deviennent nuls à la fin. Tout se passe comme si la charge Q_1' a circulé de A vers B. Le générateur passe de l'énergie U_G à 0. L'énergie libérée est $\Delta U = U_f - U_i$ avec $U_f = 0$ et $U_i = (1/2)\,Q_1'V + U_G$, donc $\Delta U = -\,(1/2)\,Q_1'V - U_G$. Remarquons que si le conducteur a une résistance nulle, il s'agira alors d'un court-circuit.

Exercice 8

1-a) $Q = C_0V_0$ avec $C_0 = (\varepsilon_0 S/e_0)$. Rappel : $V_0 = Ee_0$ et $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/S\varepsilon_0 \Rightarrow Q = (S\varepsilon_0/e_0)\,V_0$.

1-b) C'est l'énergie interne $U = QV_0/2 = Q^2/2C_0 = (1/2)\,C_0V_0^2$

1-c) C'est la force moyenne $F = QE_m$ où $E_m = -\sigma/2\varepsilon_0 = -Q/2S\varepsilon_0$. Donc, $F = -Q^2/2S\varepsilon_0$. On retrouve le même résultat avec la relation $F = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_Q$ avec $C_0 = \varepsilon_0 S/y$ (voir la fin du cours sur les conducteurs).

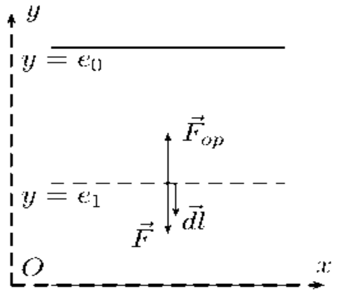
2-a) Explication : Quand un opérateur $(\vec{F}_{op})$ déplace une armature, la charge sur chaque armature (isolée électriquement) est conservée et la capacité doit augmenter car l'influence augmente par rapprochement. Le potentiel doit diminuer. La relation $Q = C_1V_1$, où $C_1 = (\varepsilon_0 S/e_1)$, montre que la différence de potentiel doit diminuer $(V_1 = (e_1/e_0)\,V_0)$.

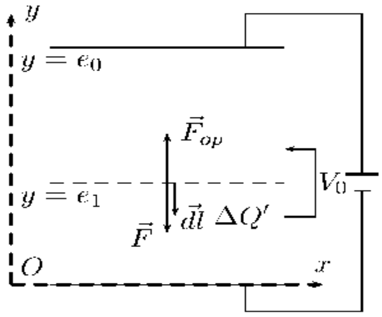
$e \searrow$	$C = \varepsilon_0 S/e \nearrow$	$Q = C^{te}$	$V = Q/C \searrow$	$U = Q^2/2C \searrow$	$F = Q^2/2\varepsilon_0 S = C^{te}$

2-b) Bilan d'énergie :

Variation de l'énergie interne $\Delta U = Q^2/2C_1 - Q^2/2C_0 = \left(Q^2/2S\varepsilon_0\right)(e_1 - e_0)$. Le condensateur cède de l'énergie car $\Delta U < 0$.

Travail des forces électrostatiques de l'armature qui s'est déplacée : la force $F = -Q^2/2S\varepsilon_0$ est constante de sorte que $W = F\,(e_1 - e_0) = \left(Q^2/2S\varepsilon_0\right)(e_0 - e_1)$.





On voit bien que $\Delta U = -W$ ce qui correspond bien à la définition de l'énergie interne. L'énergie perdue par le condensateur est récupérée par le milieu extérieur (voir remarque b à la fin de l'exercice).

3-a) Explication : cette fois, c'est la différence de potentielle qui est maintenue constante par le générateur. La capacité augmente par augmentation de l'influence (rapprochement) et la charge aussi car les armatures ne sont pas isolées électriquement. $Q_1 = C_1 V_0$.

$e \searrow$	$C = \varepsilon_0 S/e \nearrow$	$V = C^{te}$	$Q = VC \nearrow$	$U = V^2C/2 \nearrow$	$F = Q^2/2\varepsilon_0 S \nearrow$

3-b) Bilan d'énergie :

Variation de l'énergie interne : $\Delta U = \left(C_1 V_0^2/2\right) - \left(C_0 V_0^2/2\right) = \left(V_0^2 S\varepsilon_0/2\right)(1/e_1 - 1/e_0)$. Le condensateur reçoit de l'énergie car $\Delta U > 0$.

Énergie fournie par le générateur : $U_{\Delta Q} = V_0 (Q_1 - Q_0) = V_0^2 (C_1 - C_0) = \left(V_0^2 S\varepsilon_0\right)(1/e_1 - 1/e_0)$. La charge positive ΔQ passe de la borne négative à la borne positive à travers le générateur. Elle voit son potentiel augmenter de V_0 et son énergie potentielle augmenter de $U_{\Delta Q}$. Cette dernière est l'énergie fournie par le générateur.

Travail des forces électrostatiques de l'armature qui s'est déplacée : Pour chaque position y de l'armature, on a $Q = V_0 C$ avec $C = \varepsilon_0 S/y$. La force $F = -Q^2/2S\varepsilon_0 = -\left(S\varepsilon_0/2y^2\right) V_0^2$ varie donc avec la distance y entre les deux armatures (On retrouve le même résultat avec la relation $F = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_V$). Le travail est alors $W = \int_{e_0}^{e_1} F dy = -\int_{e_0}^{e_1} \left(S\varepsilon_0/2y^2\right) V_0^2 dy = \left(V_0^2 S\varepsilon_0/2\right)(1/e_1 - 1/e_0)$. Comme dans le cas précédent, ce travail positif correspond à une perte d'énergie du condensateur récupérée par le milieu extérieur.

On voit que $\Delta U = U_{\Delta Q} - W$: Lors du déplacement, le condensateur reçoit l'énergie fournie par le générateur et cède de l'énergie au milieu extérieur. La variation totale de son énergie est égale à la somme des deux variations.

4) Dans ce cas, on retrouve évidemment les mêmes résultats changés de signe.

Générateur débranché : $\Delta U = -W > 0$. Le condensateur reçoit de l'énergie cédée par le milieu extérieur.

Générateur branché : $\Delta U = U_{\Delta Q} - W$ avec $\Delta U = \left(V_0^2 S\varepsilon_0/2\right)(1/e_0 - 1/e_1) < 0$, $U_{\Delta Q} = \left(V_0^2 S\varepsilon_0\right)(1/e_0 - 1/e_1) < 0$ et $W = \left(V_0^2 S\varepsilon_0/2\right)(1/e_0 - 1/e_1) < 0$. Le condensateur reçoit l'énergie W du milieu extérieur mais ne la garde pas et la transfère au générateur. De plus, il cède l'énergie ΔU au générateur. Ce dernier reçoit donc $U_{\Delta Q} = \Delta U + W$.

Remarques : a) $U_{\Delta Q} = -V_0 (Q_1 - Q_0)$ car la charge positive $\Delta Q = (Q_1 - Q_0)$ passe de l'armature positive à l'armature négative (le condensateur se décharge par diminution de l'influence à potentiel constant).

b) En général, on parle d'énergie cédée au milieu extérieur par le condensateur si $W > 0$ car $\Delta U = -W < 0$), et d'énergie reçue du milieu extérieur si $W < 0$ ($\Delta U > 0$). Le milieu extérieur peut être vu comme un opérateur qui applique une force égale et opposée à la force électrostatique (car l'armature doit se déplacer à une vitesse constante très faible).

Exercice 9

1.a. Pour $R_A < r < R_i$, on a $E_a(r) = K\frac{Q_A}{r^2}$ par application du théorème de Gauss à la sphère A (voir cours). Donc $V_a(r) = K\frac{Q_A}{r} + C_A$. La constante se détermine par $V_a(R_A) = K\frac{Q_A}{R_A} + C_A = 0$ (A est liée à la terre). Donc $V_a(r) = KQ_A(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_A})$

1.b. Pour $r > R_e$, on a $E_b(r) = K\frac{Q}{r^2}$ et $V_b(r) = K\frac{Q}{r} + C_B$, où $C_B = 0\,\mathrm{V}$ car $V_b(\infty) = 0\,\mathrm{V}$, et $Q = Q_A + Q_i + Q_e = Q_e$ à cause de l'influence totale ($Q_i = -Q_A$).

2. On a deux équations $V_a(R_i) = V_B$, $V_b(R_e) = V_B$

$$KQ_A\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_A}\right) = V_B \tag{1}$$

$$K\frac{Q_e}{R_e} = V_B \tag{2}$$

Par conséquent, $Q_A = -\frac{V_B}{K}\frac{R_iR_A}{(R_i - R_A)} = -Q_i$ et $Q_e = \frac{V_BR_e}{K}$. Remarque : la charge totale de B est passée de $0\,\mathrm{C}$ à $Q_B = Q_i + Q_e = \frac{V_B}{K}\frac{R_iR_A + R_iR_e - R_AR_e}{(R_i - R_A)} \neq 0\,\mathrm{C}$. Elle n'a pas été conservée car B n'est pas isolé.

Exercice 10

1. L'influence totale implique $Q(R_1) = Q$ et $Q(R_2) = -Q$. Conservation de la charge de B (supposé neutre) : $Q(R_2) + Q(R_3) = 0$. Donc $Q(R_3) = Q$.

2. $\vec{E}(r) = \vec{E}_A(r) + \vec{E}_B(r)$ avec $\vec{E}_A(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r2}\vec{u}_r$ (Théorème de Gauss pour l'extérieur de A) et $\vec{E}_B(r) = \vec{0}$ (intérieur de B). Donc $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r2}$.

3. $dV = -\vec{E}.d\vec{l} = -E(r)dr$. Donc $V_B - V_A = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$.

4. $|V_B - V_A| = \frac{|Q|}{C} \implies C = 4\pi\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$.