Solution série 3

Exercice 1

1/ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\vec{u}$ est le champ électrostatique crée par q en tout point M de la surface de la sphère. Par définition le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère est $\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \iint_S \vec{E}\vec{dS}$. Or $\vec{E}$ et $\vec{dS}$ sont parallèles. Le flux devient : $\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \iint_S E dS$. Comme E ne dépend que de R et que tous les points de S sont à la même distance R de O, le module du champ est uniforme :

$$\Phi\left(\vec{E}/S\right) = E\iint_S dS = ES = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

2- Le cylindre est composé d'une surface latérale S_L et de deux surfaces de bases S_{B1} et S_{B2}.
Le flux de $\vec{E}$ à travers le cylindre est

$$\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \iint_S \vec{E}\vec{dS} = \iint_S \vec{E}\vec{dS} + \iint_S \vec{E}\vec{dS} + \iint_S \vec{E}\vec{dS}.$$

$$= \iint_{Sl} E_L dS_L \cos\theta_L + \iint_{SB1} E_{B1} dS_{SB1}\cos\theta_1 + \iint_{SB2} E_{B2} dS_{B2}\cos\theta_2$$

Avec $E_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{{r_L}^2}$, $E_{B1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{{r_1}^2}$ et $E_{B2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{{r_2}^2}$.

Si Ω_L, Ω_1 et Ω_2 sont les angles solides sous lesquels on observe du point O respectivement les surfaces S_L, S_{B1} et S_{B2} alors l'expression du flux devient :

$$\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\iint_{SL}\frac{dS_L\cos\theta_L}{{r_L}^2} + \iint_{SB1}\frac{dS_{B1}\cos\theta_1}{{r_1}^2} + \iint_{Sl}\frac{dS_{B2}\cos\theta_2}{{r_2}^2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\Omega_L + \Omega_{B1} + \Omega_{B2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi$$

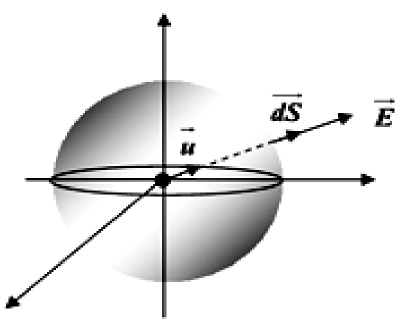
Où $\Omega = 4\pi$ est l'angle solide sous lequel on observe tout l'espace.

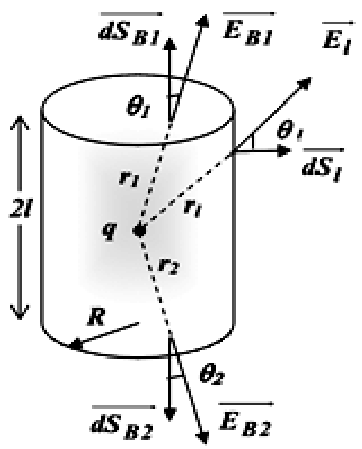
On retrouve $\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$

De même pour deux plans on retrouve le même rapport q/ε_0 car l'angle solide sous lequel on voit un plan est 2π *Srd* et donc l'angle solide sous lequel on voit deux plans est 4π *Srd* (espace).

Remarque : - les surfaces étudiées sont toutes fermées. Deux plans parallèles et espacés sont considérés comme une surface fermée.

Conclusion : Le flux du champ électrique crée par une charge à travers une surface fermée contenant la charge est toujours égal au rapport q/ε_0 : C'est le théorème de Gauss.





Exercice 2

1- En un point M de l'espace le champ est radial et il est constant sur tous les points ayant la même distance r de O. $\iint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho\, dv$ S étant la surface de Gauss et v le volume chargé inclus dans S.

► Si $r > R_2$, $E4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\left(R^3{}_2 - R^3{}_1\right)$ soit $E = \frac{\rho\left(R_2{}^3 - R_1{}^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Longleftrightarrow V = -\int E dr = \frac{\rho\left(R_2{}^3 - R_1{}^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$, la constante d'intégration est nulle car $V(\infty) =$ 0

0

► Si $R_2 > r > R_1$, $E4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R^3{}_1\right)$ soit $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(r^3 - R^3{}_1\right)}{r^2}$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Longleftrightarrow V = -\int E dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1{}^3}{r}\right) + C_1$$

► Si $r < R_1$, absence de charge dans la surface fermée, $E = 0$. $V = C_2$.

Détermination de C_1 et C_2

Quand M est à la distance R_1 de O : $\lim\limits_{r \to R_1^+} V(r) = \lim\limits_{r \to R_1^-} V(r)$. Soit $C_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1}\right) + C_1$

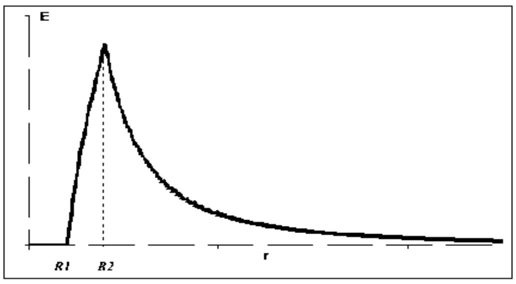
A la distance R_2 de O : $\lim\limits_{r \to R_2^+} V(r) = \lim\limits_{r \to R_2^-} V(r)$. Soit $-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2}\right) + C_1 = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$

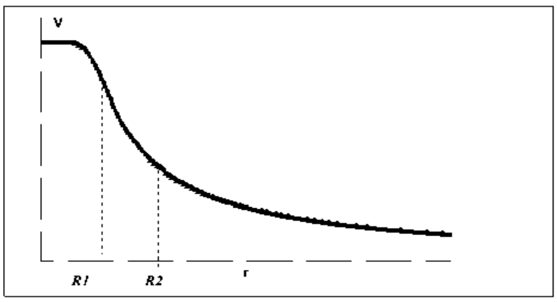
$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R_2^2$ et donc $C_2 = \frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right)$

On regroupe les résultats dans le tableau :

$r > R_2$	$E = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$	$V = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$
$R_2 > r > R_1$	$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(r^3 - R_1^3\right)}{r^2}$	$V = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3R_2^2}{2} - \frac{r^3 + 2R_1^3}{2r}\right)$
$r < R_1$	$E = 0$	$V = \frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$

2-





Le champ et le potentiel sont des fonctions continues à la traversée d'un <u>volume</u> chargé.
N.B : *Le champ n'est discontinu qu'au passage à travers une surface mince chargée.*

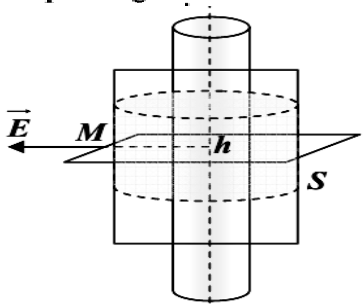
3- Si R_1 tend vers R_2, on obtient une seule sphère chargée en surface de distribution : $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

Deux cas uniquement sont possibles $r < R$ et $r > R$. On peut rappliquer le théorème de Gauss ou directement remplacer ρ par son expression en fonction de la charge.

$r > R$	$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$	$V = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$
$r < R$	$E = 0$	$V = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

Exercice 3

Le cylindre infini contient deux plans de symétrie passant par hM. Le champ électrique s'il existe est donc porté par hM.
Le champ ne dépend que de la distance entre M et les charges.
L'ensemble des points M tel que la distance hM reste constante est un cylindre d'axe ZZ' et de rayon $r = hM$. La surface de Gauss S sera alors ce cylindre qu'il faut fermer par deux surfaces de base. La hauteur de S est finie que l'on prend égale à L.



$$\iint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_\Sigma \sigma\, d\Sigma$$

Σ étant la surface chargée, du cylindre infini, contenue dans la surface de Gauss.

$$E\,2\pi rL = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}2\pi RL \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

N. B : *Le flux du champ à travers les deux surfaces de base est nul car le champ est perpendiculaire à l'élément de surface.*

Exercice 4

Théorème de Gauss : $\iint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho\, dv$ où S est la sphère de Gauss de centre O et de rayon r'. v est le volume chargé contenu dans S.

1- $E\,4\pi r'^2 = \frac{a}{\varepsilon_0}\iiint_v r\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{a}{\varepsilon_0}\int_0^R r^3\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$E = \frac{a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^4}{4}\,2\,2\pi\frac{1}{r'^2} = \frac{aR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}$$

2- $E\,4\pi r'^2 = \frac{b}{\varepsilon_0}\iiint_v \frac{1}{r} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{b}{\varepsilon_0}\int_0^R r\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$E = \frac{b}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^2}{2}\,2\,2\pi\frac{1}{r'^2} = \frac{bR^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}$$