Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
SMA Semestre VI
Distributions

Cours sur les distributions

Opérations sur les distributions (suite)

1.5. Ouvert d'annulation d'une distribution.

Définition 2. *Soient Ω un ouvert non vide de $I\!R^d$, $d \geq 1$ et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On dira que T est nulle sur un ouvert $\omega \subset \Omega$ si sa restriction à ω est nulle.*

Autrement dit : $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ est nulle sur un ouvert ω inclus dans Ω si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$,

$$< T_{|\omega}, , \varphi >= 0.$$

Définition 3. *On appelle ouvert d'annulation de $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ le plus grand ouvert (s'il existe) de Ω sur lequel T est nulle. C'est la réunion de tous les ouverts inclus dans Ω sur lesquels T est nulle.*

Définition 4. *On appelle support d'une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ le complémentaire, dans Ω, de son ouvert d'annulation.*

Exemples.

1. Soient Ω un ouvert non vide de $I\!R^d$ et $a \in \Omega$, alors supp $(\delta_a) = \{a\}$.
2. Soient $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\Omega)$, alors supp Λ_f est le complémentaire (dans l'espace topologique Ω) du plus grand ouvert sur lequel f est nulle presque partout

Définition 5.

1. *Une famille d'ouverts $(\omega_j)_{j\in\mathcal{I}}$ sera dite un recouvrement ouvert d'un ensemble $\Omega \subset I\!R^d$ si*

$$\Omega \subset \bigcup_{j\in\mathcal{I}} \omega_j.$$

2. *On appelle partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^\infty$ subordonnée au recouvrement $(\omega_j)_{j\in\mathcal{I}}$, une famille de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ $(\chi_j)_{j\in\mathcal{I}}$ possédant les propriétés suivantes :*
   - *(a) Pour tout $j \in \mathcal{I}$, $\chi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega_j)$ et $\chi_j \geq 0$ dans ω_j.*
   - *(b) Sur tout compact K de Ω, un nombre fini seulement des χ_j ne sont pas identiquement nulles.*

(c) pour tout $x \in \Omega$, on a

$$\sum_{j \in \mathcal{I}} \chi_j(x) = 1.$$

Théorème (Partitions de l'unité) *Soient $K \subset I\!R^d$ compact, et des ouverts de $I\!R^d$ notés $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ tels que $K \subset \Omega_1, \ldots, \Omega_n$. Alors il existe des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I\!R^d$ telles que*

$$0 \leq \varphi_k \leq 1 \textit{ et } \operatorname{supp}(\varphi_k) \textit{ compact } \subset \Omega_k \textit{ pour } k = 1, \ldots, n,$$

vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k = 1 \textit{ sur un voisinage de } K.$$

Autrement dit : Pour tout recouvrement ouvert d'un compact K, il existe un recouvrement fini et une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.

Démonstration.

Etape 1. Montrons qu'il existe $K_1, \ldots, K_n$ compacts tels que

$$K_j \subset \Omega_j, j = 1, \ldots, n, \text{ et } K \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j.$$

En effet, pour tout $x \in K$, il existe $k_x \in [\![1, \ldots, n]\!]$ et $r_x > 0$ tels que la boule fermée $\overline{B(x, r_x)} \subset \Omega_{k_x}$. Evidemment $(B(x, r_x))_{x \in K}$ est un recouvrement ouvert du compact K. Il existe donc $x_1, \ldots, x_m \in K$ tels que

$$K \Subset \overline{B(x_1, r_{x_1})} \cup \cdots \cup \overline{B(x_m, r_{x_m})}.$$

Pour tout $j = 1, \ldots, m$, notons

$$A_j = \{l = 1, \ldots, m \mid k_{x_l} = j \},$$

et posons

$$K_j = \bigcup \overline{B(x_l, r_{x_l})} \subset \Omega_j, j = 1, \ldots, n.$$

Pour tout $j = 1, \ldots, m$, notons

$$A_j = \{l = 1, \ldots, m \mid k_{x_l} = j \},$$

et posons

$$K_j = \bigcup \overline{B(x_l, r_{x_l})} \subset \Omega_j, j = 1, \ldots, n.$$

Etape 2. En appliquant le Lemme 1.4.1, on construit, pour tout $j = 1, \ldots, n$, une fonction $\psi_j \in \mathcal{C}^\infty(I\!R^d)$ telle que

$$\operatorname{supp}(\psi_j) \text{ compact } \subset \Omega_j, \psi_j \geq 0, \psi_j = 1 \text{ sur } \mathcal{V}_j \text{ voisinage ouvert de } K_j.$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j > 0 \text{ sur } \mathcal{V} = \mathcal{V}1 \cup \cdots \cup \mathcal{V}_n \text{ voisinage ouvert de } K.$$

Toujours d'après le Lemme 1.4.1, soit $\theta \in \mathcal{C}^infty(I\!R^d)$ vérifiant

$$\text{supp}(\theta) \text{ compact } \subset \mathcal{V}, \theta = 1 \text{ au voisinage de } K, \text{ et } 0_leq\theta_leq1.$$

Ainsi

$$1 - \theta + \sum_{k=1}^{n} \psi_k > 0 sur I\!R^d.$$

En effet

$$1 - \theta(x) + \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x) \geq \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x) > 0 \text{ si } x \in \mathcal{V},$$

$$1 - \theta(x) + \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x) \geq \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x) \geq 1 - \theta(x) = 1 \text{ si } x \notin \mathcal{V}.$$

Posons alors

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{1 - \theta + \sum_{k=1}^{n} \psi_k}, \ j = 1, \ldots, n.$$

Par construction, $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(I\!R^d)$ et vérifie

$$\varphi_j \geq 0, \text{ et supp}(\varphi_j) \text{ compact } \subset \Omega_j.$$

Enfin, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) = 1 \text{ en tout point où } \theta(x) = 1$$

c'est-à-dire sur un voisinage de K.

Proposition 9. *Soient Ω un ouvert de $I\!R^d$, $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $(\omega_j)_{j\in\mathcal{I}}$ une famille d'ouverts de Ω telle que*

$$\bigcup_{j\in\mathcal{I}} \omega_j = \Omega.$$

On suppose que pour tout $j \in \mathcal{I}$, $T|_{\omega_j} = 0$ alors T est la distribution nulle sur Ω.

Démonstration.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et soit $K = \text{supp}(\varphi) \Subset \Omega$. Comme $(\omega_j)_{j\in\mathcal{I}}$ est un recouvrement ouvert de K, il existe un recouvrement fini, c'est-à-dire il existe un ensemble fini d'indice $j_1, \ldots, j_n \in \mathcal{I}$ tels que

$$K \subset \omega_{j_1} \cup \cdots \cup \omega_{j_n}.$$

Soit $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement fini $\{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_n}\}$: c'est-à-dire que, pour tout $j \in [\![, 1, n]\!]$

$$0 \leq \chi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega_{j_k}) \text{ est à support dans } \omega_{j_k}$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^{n} \chi_k = 1 \text{ au voisinage de } K.$$

Alors

$$< T, \varphi >=< T, \sum_{k=1}^{n} \chi_k \varphi >= \sum_{k=1}^{n} < T|_{\omega_{j_k}}, \chi_k \varphi >= 0$$

et comme φ est quelconque dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on en déduit que $T = 0$.

1.6. Principe de recollement des distributions

Comme on a vu que l'on peut restreindre une distribution à n'importe quel ouvert de Ω, on peut aussi la reconstruire en connaissant ses restrictions à chaque ouvert d'un recouvrement (ouvert) de Ω.

Proposition 10. *Soient Ω un ouvert de $I\!R^d$ et $(\omega_j)_{j\in\mathcal{I}}$ une famille d'ouverts de Ω telle que*

$$\bigcup_{j\in\mathcal{I}} \omega_j = \Omega.$$

Soit $(T_j)_{j\in\mathcal{I}}$ une famille de distributions telle que $T_j \in \mathscr{D}'(\omega_j)$ pour tout $j \in \mathcal{I}$. Supposons que

$$T_k|_{\omega_j\cap\omega_k} = T_j|_{\omega_j\cap\omega_k} \text{ pour tous } j, k \in \mathcal{I} \text{ tels que } \omega_k \cup \omega_j \neq \emptyset.$$

Alors il existe une unique distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que

$$T|_{\omega_j} = T_j, j \in \mathcal{I}.$$

Démonstration.

Unicité. Supposons qu'il existe deux distributions sur Ω, T et $\check{T}$, vérifiant cette propriété. Alors la distribution $S = T - \check{T}$ est telle que

$$T|_{\omega_j} = 0 \text{ pour tout } j \in \mathcal{I}.$$

La proposition 9. implique alors que S est nulle.

Existence. Soit K un compact de Ω. Comme $(\omega_j)_{j\in\mathcal{I}}$ est un recouvrement ouvert de Ω, il existe $\{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_n}\}$ recouvrement ouvert de K et une partition de l'unité sur K notée $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ subordonnée à ce sous-recouvrement fini.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$. Posons

$$T_K(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} < T_{j_k}, \chi_k \varphi > .$$

Exercice.

1. Montrer que T_K est une forme linéaire indépendante du choix du sous-recouvrement $\{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_n}\}$ et de la partition de l'unité $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$.

2. Montrer qu'en posant pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$

   $$< T, \varphi >=< T_K, \varphi >$$

   T est une distribution qui vérifie les conclusions de la proposition.

1.7. Translation et Dilatation

On se place dans $I\!R^d$ et pour $\varphi \in \mathcal{C}(I\!R^d)$, $h \in I\!R^d$ et $\lambda \in I\!R$, on pose pour tout $x \in I\!R^d$

$$(T_h\varphi)(x) = \varphi(x-h).$$

et

$$(D_\lambda\varphi)(x) = \varphi(\lambda x)$$

Cela définit des opérations de $\mathcal{C}_c^\infty(I\!R^d)$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(I\!R^d)$. Ces opérations sont en fait des opérateurs linéaires continus de $\mathscr{D}(I\!R^d)$ sur $\mathscr{D}(I\!R^d)$

Proposition 9.

1. *L'application $\varphi \mapsto T_h\varphi$ est linéaire continue de $\mathscr{D}(I\!R^d)$ sur $\mathscr{D}(I\!R^d)$.*
2. *L'application $\hat{T}_h : \mathscr{D}'(I\!R^d) \to \mathscr{D}'(I\!R^d)$ définie pour tout $S \in \mathscr{D}'(I\!R^d)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(I\!R^d)$ par :*

$$< \hat{T}_h S, \varphi > = < S, T_h\varphi > .$$

   est linéaire continue. La distribution $\hat{T}_h S$ est dite la translatée de la distribution S.

3. *L'application $\varphi \mapsto D_\lambda\varphi$ est linéaire continue de $\mathscr{D}(I\!R^d)$ sur $\mathscr{D}(I\!R^d)$.*
4. *L'application $\hat{D}_\lambda : \mathscr{D}'(I\!R^d) \to \mathscr{D}'(I\!R^d)$ définie pour tout $S \in \mathscr{D}'(I\!R^d)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(I\!R^d)$ par :*

$$< \hat{D}_\lambda S, \varphi > = < S, D_\lambda\varphi > .$$

   est linéaire continue. La distribution $\hat{D}_\lambda S$ est dite la dilatée de la distribution S de rapport λ.

Démonstration. (Exercices)

1. Soient K un compact de $I\!R^d$ et $h \in I\!R^d$. On pose

$$K_h^+ = \{x+h \mid x \in K\} \text{ et } K_h^- = \{x-h \mid x \in K\}.$$

   Soit $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(I\!R^d)$. Quelle relation y a -t-il entre K =supp(φ) et supp($T_h\varphi$)?

2. Soit $h \in I\!R^d$. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge vers φ dans $\mathscr{D}(I\!R^d)$, alors $(T_h\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge vers $T_h\varphi$ dans $\mathscr{D}(I\!R^d)$.
3. Soit $\lambda \in I\!R$. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge vers φ dans $\mathscr{D}(I\!R^d)$, alors $(D_\lambda\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge vers $D_\lambda\varphi$ dans $\mathscr{D}(I\!R^d)$.

Exercices

1. Montrer que si une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{D}'(I\!R^d)$ converge dans $\mathscr{D}'(I\!R^d)$ vers T, alors pour tout $h \in I\!R^d$, $(T_hT_n)_{n\geq 1}$ converge vers T_hT.

2. Montrer que si une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{D}'(I\!R^d)$ converge dans $\mathscr{D}'(I\!R^d)$ vers T, alors pour tout $\lambda \in I\!R$, $(D_\lambda T_n)_{n\geq 1}$ converge vers $D_\lambda T$.

Identification de la translatée dans le cas de distributions régulières.

Soient $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(I\!R^d)$, Λ_f la distribution régulière associée, $h \in I\!R^d$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I\!R^d)$. On a :

$$< \hat{T}_h\Lambda_f, \varphi >=< \Lambda_f, T_h\varphi >= \int_{I\!R^d} f(x)\varphi(x-h)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

En posant $z = x - h$, on obtient

$$< \hat{T}_h\Lambda_f, \varphi >= \int_{I\!R^d} f(z+h)\varphi(z)\mathrm{d}z,$$

de telle sorte que si f est continue et si on pose pour tout $z \in I\!R^d$

$$(T_{-h}f)(z) = f(z+h)$$

on obtient

$$< \hat{T}_h\Lambda_f, \varphi >= \int_{I\!R^d} (T_{-h}f)(z)\varphi(z)\mathrm{d}z =< \Lambda_{(T_{-h}f)}, \varphi > .$$

La translatée de la distribution régulière Λ_f est la distribution régulière associée à la fonction $T_{-h}f$.

Notons pour tout $x \in I\!R^d$ et $\varphi \in \mathcal{C}(I\!R^d)$,

$$\check{\varphi}(x) = (D_{-1}\varphi)(x) = \varphi(-x),$$

alors l'égalité (1) apparait comme un produit de convolution. En effet ,

$$< \hat{T}_h\Lambda_f, \varphi >=< \int_{I\!R^d} f(x)\varphi(x-h)\mathrm{d}x =< \int_{I\!R^d} f(x)\tilde{\varphi}(h-x)\mathrm{d}x = (f * \tilde{\varphi})(h).$$

C'est exactement cette dernière égalité qui va nous servir pour définir le produit de convolution d'une distribution et d'une fonction dans le paragraphe 1.7.

Identification de la dilatée dans le cas de distributions régulières.

Soient $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(I\!R^d)$, Λ_f la distribution régulière associée, $\lambda \in I\!R$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I\!R^d)$. On a :

$$< \hat{D}_\lambda\Lambda_f, \varphi >=< \Lambda_f, D_\lambda\varphi >= \int_{I\!R^d} f(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x.$$

Posons $z = \lambda x$. Les égalités précédentes donnent alors les suivantes :

$$< \hat{D}_\lambda\Lambda_f, \varphi >= \frac{1}{\lambda^d}\int_{I\!R^d} f(\frac{z}{\lambda})\varphi(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{\lambda^d} < \Lambda_{D_{1/\lambda}f}, \varphi > .$$

1.7. Convolution par une fonction.

Nous avons vu précédemment que si $f \in \mathscr{L}^1(I\!R^d)$ et si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I\!R^d)$, alors le produit de convolution de f et de φ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le résultat précédent subsiste pour $f \in \mathscr{L}^1(I\!R^d)$.

Proposition 10. *Soient $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(I\!R^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I\!R^d)$, alors $f * g \in \mathcal{C}^\infty(I\!R^d)$ et si f est à support compact, $f * g$ l'est aussi.*

Démonstration. Soient $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Posons pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$g(x, y) = \varphi(x - y)f(y).$$

Exercice.

1. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ vérifie toutes les hypothèses permettant les dérivations sous le signe somme.

2. En déduire que la fonction $x \mapsto f * g(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^d$.

3. Soit f une fonction définie presque partout sur un ouvert Ω. On appelle ouvert d'annulation de f, le plus grand ouvert $\mathcal{O}_f$ sur lequel f s'annule presque partout. Le support de f est alors le complémentaire dans Ω de $\mathcal{O}_f$. Montrer que si $f \in \mathscr{L}(\Omega)$

$$\mathrm{supp} f = \mathrm{supp} \Lambda_f.$$

4. Montrer que si $\mathrm{supp}(f)$ est compact alors $\mathrm{supp}(f * \varphi)$ est compact.

Remarque. Soient $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Ecrivons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x - y)f(y)\mathrm{d}y =< \Lambda_f, \varphi(x - .) > .$$

Les dernières égalités montre que l'on peut définir le produit de convolution de la distribution Λ_f par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact en posant

$$\Lambda_f * \varphi(x) =< \Lambda_f, \varphi(x - .) >$$

Proposition-Définition 2. *Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, alors en posant pour tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$T * \varphi(x) =< T, \varphi(x - .) >$$

nous définissons ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^d$ dite le produit de convolution de T et de φ.

Démonstration. Sous forme d'exercices.