Définition : Différentielle exacte

La forme différentielle est dite **exacte**, si il existe une application f dont la différentielle totale est :

$$df = \omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Cette différentielle totale est une forme différentielle particulière où les fonctions P et Q sont reliées aux dérivées partielles de la fonction $f(x,y)$ par :

$$P(x,y) = \frac{\delta f(x,y)}{\delta x} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{\delta f(x,y)}{\delta y}$$

L'application du théorème de Schwarz entre les dérivées "croisées" conduit dans le cas de la différentielle exacte à la relation entre les fonctions P et Q :

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \Leftrightarrow \frac{\delta P(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta Q(x,y)}{\delta x} \Leftrightarrow P'_y = Q'_x$$

Dans le cas d'une fonction de 3 variables $f(x,y,z)$: la différentielle totale s'exprime par :

$$df = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

avec les relations dues au théorème de Schwarz :

$$P'_y = Q'_x \ ; \ Q'_z = R'_y \ ; \ P'_z = R'_x$$