Exercice 20 :

Soit G un groupe fini d'ordre 6.

((Le but de cet exercice est de classifier tous les groupes d'ordre 6)).

1

a) Montrer que G admet un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3.

Preuve : D'après le 1er théorème de Sylow, $\exists H$ et K des s/g de G avec $o(H)=2$ et $o(K)=3$, donc $H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ cyclique et $K \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ cyclique, donc $\exists x \in H$ tel que $H = gr(x)$ et alors $o(x)=2$ et $\exists y \in K$ tel que $K = gr(y)$ et alors $o(y)=3$.

b) On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre 1 ou 2. Soit a et b deux éléments de G tels que $a \neq b$, $a \neq e$

et $b \neq e$. Montrer que $\boxed{2}$:

$\{e, a, b, ab\}$ est un s/g de G d'ordre 4.

<u>Preuve</u>: On a : $a^2 = b^2 = e$, d'où

$a^{-1} = a$ et $b^{-1} = b$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$.

Et $a(ab) = a^2 b = b$, $(ab)b = ab^2 = a$,

$abab = (ab)^2 = e$ ((Car $o(ab) \in \{1, 2\}$,

et si $o(ab) = 1$ alors $ab = e$ (i.e) $a = b$, absurde.

Donc $o(ab) = 2$ (i.e) $(ab)^2 = e$)).

Donc $\{e, a, b, ab\}$ contient l'élément neutre e, stable par la loi de G et chaque élément de cet ensemble admet son inverse dans cet ensemble, et comme les éléments sont 2 à 2 distincts, alors c'est un sous-groupe de G d'ordre 4.

c) Montrer que si G est abélien, alors il est cyclique. 3

<u>Preuve:</u> Soit $(x,y)\in G^2$ tel que

$o(x)=2$ et $o(y)=3$, $gr(x)\cap gr(y)=\{e\}$

Car $o(gr(x)\cap gr(y))$ divise 2 et 3, et

comme $xy=yx$, alors

$o(xy)=ppcm(o(x),o(y))=ppcm(2,3)=6$

ainsi $G=gr(xy)\simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

d) On suppose que G n'est pas abélien.

Montrer que G est isomorphe à D_3.

<u>Preuve:</u> « <u>Rappel (Voir ex 19):</u>

$G\simeq D_3 \Longleftrightarrow \exists (a,b)\in G^2$ tel que

$o(a)=3$, $o(b)=2$, $o(ab)=3$

et G est engendré par $\{a,b\}$ »

Soit $(x,y) \in G^2$ tel que $o(x)=2$ et $o(y)=3$. Soit $H=$ le s/g de G engendré par $\{x,y\}$. Montrons que $H=\{e,x,y,xy,y^2,xy^2\}$:
Si $y^2=x$ alors $o(y^2)=o(x)=2$, or $o(y^2)=\frac{o(y)}{pgcd(2,o(y))}=\frac{3}{2\wedge 3}=3$, donc

4

$y^2 \neq x$. Ainsi les éléments e, x, y, xy, y^2, xy^2 sont deux à deux distincts et on a bien l'égalité.

Donc pour prouver que $G \simeq D_3$, il suffit de prouver que $o(yx)=2$:

Comme $yxy \in H$ alors

- $yxy=e \Leftrightarrow yxy=y^3=e \Leftrightarrow xy=y^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=y$, absurde.

- $yxy=y \Leftrightarrow yx=e \Leftrightarrow y=x^{-1}=x$, absurde.

- $yxy = xy \Longleftrightarrow y = e$, absurde.
- $yxy = y^2 \Longleftrightarrow yx = y \Longleftrightarrow x = e$, absurde.
- $yxy = xy^2 \Longleftrightarrow yx = xy$

et dans le cas, et comme $gr(x) \cap gr(y) = \{e\}$, on a $o(xy) = ppcm(o(x), o(y)) = ppcm(2,3) = 6$, donc $G = gr(xy) \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ abélien, absurde.

Ainsi, forçément $yxy = x$ (ie) $yxyx = e$ (ie) $(yx)^2 = e$, et comme $yx \neq e$, alors $o(yx) = 2$. D'où $G \simeq D_3$.

e) Les groupes S_3 et D_3 sont-ils isomorphes?

Preuve: $o(S_3) = 3! = 2.3 = 6$. $((1,2)(1,2,3))(3) = (1,2)(1) = 2$ et $((1,2,3)(1,2))(3) = (1,2,3)(3) = 1$.

Donc $(1,2)(1,2,3) \neq (1,2,3)(1,2)$ et S_3 est non commutatif, d'après d) $S_3 \simeq D_3$.

C.Q.F.D.