Exercice 21 (Série 1):

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe distingué de G.

1°) Montrer que les p-sous groupes de Sylow de H sont les intersections des p-sous groupes de Sylow de G avec H.

Preuve:

On pose $o(H) = p^{\beta}.m_1$ où β et m_1 sont dans $\mathbb{N}^*$. Soit K un p s/g de Sylow de G, donc $o(K) = p^{\alpha}$. Montrons que $K \cap H$ est un p s/g de Sylow de H (ie) que $o(K \cap H) = p^{\beta}$:

$K \cap H$ est un s/g de K et $o(K) = p^{\alpha}$, d'où $K \cap H$ est un p s/g de H (ie) $o(K \cap H) = p^{k}$ avec $k \leq \beta$. Comme $H \triangleleft G$, alors KH est un groupe (C'est le s/g de G engendré par $H \cup K$)

On a : $o(KH) = \frac{o(K).o(H)}{o(K\cap H)} = \frac{p^{\alpha}.p^{\beta}m_1}{p^k} =$

$= p^{\alpha+\beta-k}.m_1$. Or K est un p s/g de Sylow de G, et comme $K \subseteq KH$, alors K est un p s/g de Sylow de KH, donc $\alpha+\beta-k=\alpha$ (ie) $k=\beta$. D'où $o(K\cap H)=p^{\beta}$ et $K\cap H$ est un p s/g de Sylow de H. (2)

. Inversement ; Si H_1 est un p s/g de Sylow de H ((ie) $o(H_1)=p^{\beta}$)), donc H_1 est un p s/g de G donc contenu dans un p s/g de Sylow de G (ie) $\exists K$ p s/g de Sylow de G tel que $H_1 \subseteq K$ et $o(K)=p^{\alpha}$.

Montrons que $H_1 = K\cap H$:

"$\subseteq$" évidente.

"$\supseteq$" $K\cap H$ est un s/g de G avec $o(K\cap H)=p^k$ avec $k\leq\beta$, ainsi $H_1 \subseteq K\cap H$, $o(H_1)=p^{\beta}$ et $o(K\cap H)=p^k$ avec $k\leq\beta$, d'où $k=\beta$ et $H_1 = K\cap H$.

c.q.f.d.

2°) Montrer que les p s/g de Sylow de G/H sont de la forme $\frac{KH}{H}$ où K est un p s/g de Sylow de G.

3

Preuve:

$$o\left(G/H\right) = \frac{o(G)}{o(H)} = \frac{p^{\alpha}.m}{p^{\beta}.m_1} = p^{\alpha-\beta}.\frac{m}{m_1} = p^{\alpha-\beta}.m_2$$

avec $m_2 \in \mathbb{N}^*$ et $pgcd(p, m_2) = 1$.

• Soit K un p s/g de Sylow de G. Selon 1°), $K \cap H$ est un p s/g de Sylow de H (ie) $o(K\cap H) = p^{\beta}$.

Comme $H \triangleleft G$, alors KH est un s/g de G et on a: $o(KH) = \frac{o(K).o(H)}{o(K\cap H)} = \frac{p^{\alpha}.p^{\beta}m_1}{p^{\beta}} = p^{\alpha}.m_1$,

donc $o\left(\frac{KH}{H}\right) = \frac{p^{\alpha}.m_1}{p^{\beta}.m_1} = p^{\alpha-\beta}$ et $\frac{KH}{H}$ est un p s/g de Sylow de G/H.

• Inversement; Si K_1 est un p s/g de Sylow de G/H. Montrons qu'il existe K p s/g de Sylow de G tel que $K_1 = \frac{KH}{H}$:

$\exists K'$ s/g de G tel que $H \subseteq K'$ et $K_1 = K'/H$.

On a : $p^{\alpha-\beta} = o(K_1) = \dfrac{o(K')}{o(H)}$ (ie)

$o(K') = p^{\alpha-\beta} . o(H) = p^{\alpha-\beta} p^{\beta} m_1 = p^{\alpha} . m_1$.

Soit K un p.s/g de Sylow de K', donc $o(K) = p^{\alpha}$ et alors K est un p.s/g de Sylow de G. Comme $K \subseteq K'$ et $H \subseteq K'$ alors $KH \subseteq K'$.

D'après 1°), $K \cap H$ est un p.s/g de Sylow de H (ie) $o(K \cap H) = p^{\beta}$. On a : $KH \subseteq K'$ et

$o(KH) = \dfrac{o(K) . o(H)}{o(K \cap H)} = \dfrac{p^{\alpha} . p^{\beta} m_1}{p^{\beta}} = p^{\alpha} . m_1 = o(K')$, d'où $K' = KH$ et

$K_1 = \dfrac{KH}{H}$ ${}^{\times}$ 4

C.Q.F.D.