Série 4

Exercice 1

Une inductance L_1 est disposée en série avec un élément composé d'une capacité C en parallèle avec une inductance L_2. Le tout est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace V et de pulsation ω (Figure 1).

1. Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit,
2. Calculer la valeur efficace du courant parcourant L_1,
3. Déterminer la valeur de C pour que :
   (a) Le courant i_1 parcourant L_1 soit nul,
   (b) Le courant i_1 parcourant L_1 soit infini,
   On notera cette valeur C_0,
4. Dans le cas particulier $L_1 = L_2 = L$ et $C > C_0$:
   (a) Calculer le déphasage entre la tension V_{AB} et le courant dans la branche principale.
   (b) Écrire l'expression de la tension aux bornes et le courant dans la branche principale.

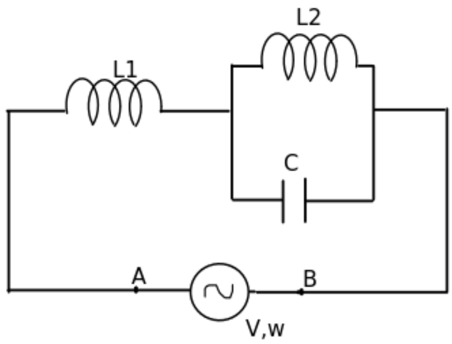


Figure 1

Exercice 2

Un circuit électrique composé d'un condensateur C monté en série avec un sous circuit (L//R) comprenant une inductance L en parallèle avec une résistance R. Le circuit est alimenté par un générateur de f.e.m sinusoïdale u (t) de pulsation ω (Figure 2).

1. Déterminer l'impédance équivalente du circuit R-L parallèle.
2. Déterminer l'impédance totale du circuit.
3. Calculer le courant complexe $\underline{I}_C$ parcourant la capacité C.
4. Calculer le courant complexe $\underline{I}_R$ parcourant la résistance R.
5. En déduire la condition pour que le courant $\underline{I}_R$ soit indépendant de la valeur de R.

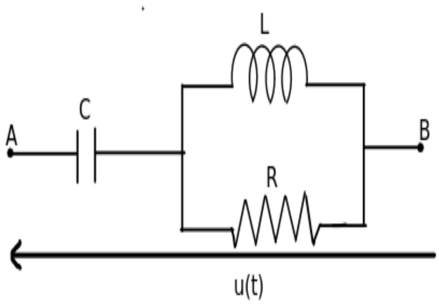


Figure 2

Exercice 3

1. On considère les deux dipôles représentés sur la figure ci-dessous (Figure 3), alimentés sous une tension sinusoïdale de pulsation ω.
   (a) Montrer que l'on peut choisir R_2 et L_2 en fonction de R_1, L_1 et ω de telle façon que les deux circuits soient équivalents.
   (b) Déterminer la pulsation ω_0 pour laquelle on a $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

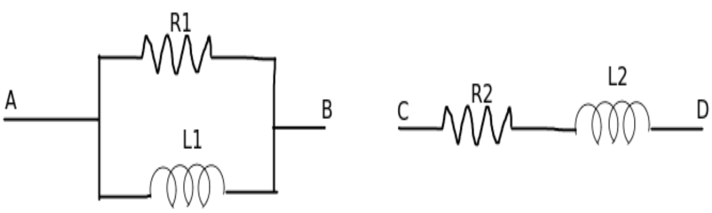


Figure 3

2. Ces deux circuits équivalents sont branchés (Figure 4) en série et alimentés par un générateur qui délivre une tension sinusoïdale : $u(t) = U_m cos(\omega_0 t)$.

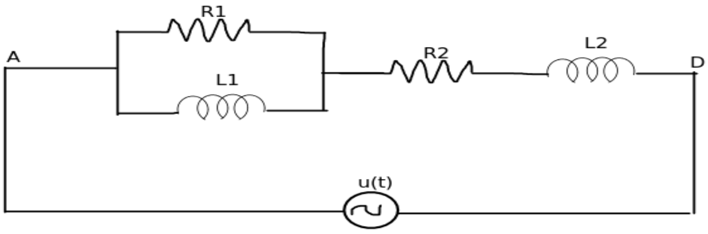


Figure 4

   (a) Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}_{AD}$ du circuit en fonction de R_2, L_2 et ω_0.
   (b) En utilisant les résultats de la question 1, montrer que cette impédance peut se mettre sous la forme simple : $\underline{Z}_{AD} = R_1(1+j)$.
   (c) Donner l'expression de l'intensité i(t) sous la forme suivante $i(t) = I_m cos(\omega t + \phi)$.
   (d) Calculer la capacité C que l'on doit mettre en série dans ce circuit pour que i(t) et u(t) soient en phase pour ω_0.
   (e) Calculer les puissances active et réactive dans ce circuit, quel est l'intérêt d'introduire ce condensateur dans le circuit.

Exercice 4

On considère le montage représenté sur la figure 5. On applique aux bornes A et B la tension sinusoïdale $u(t) = U_m cos(\omega t)$, i(t) est prise de la forme : $i(t) = I_m cos(\omega t - \phi)$

1. Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}_{AB}$, exprimer $\underline{Z}_{AB}$sous la forme $\dfrac{a+jb}{c+jd}$.
2. En déduire l'intensité efficace I du courant total i(t).
3. Exprimer $\underline{Z}_{AB}$ sous la forme $a' + jb'$ et déterminer l'expression du déphasage de la tension u(t) par rapport à i(t).
4. Exprimer les intensités efficaces I_1 et I_2 des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de la tension efficace U.
5. La pulsation ω étant variable, trouver la valeur de ω pour que le courant total i(t) soit en phase avec la tension u(t) appliquée entre A et B. La condition cherchée est-elle toujours réalisable ?
6. Lorsque la condition prévue en question 5 est réalisée, montrer que l'impédance totale est égale à $\dfrac{L}{RC}$.
7. Calculer pour cette condition la puissance moyenne consommée dans le circuit en fonction de L, R, C et I.

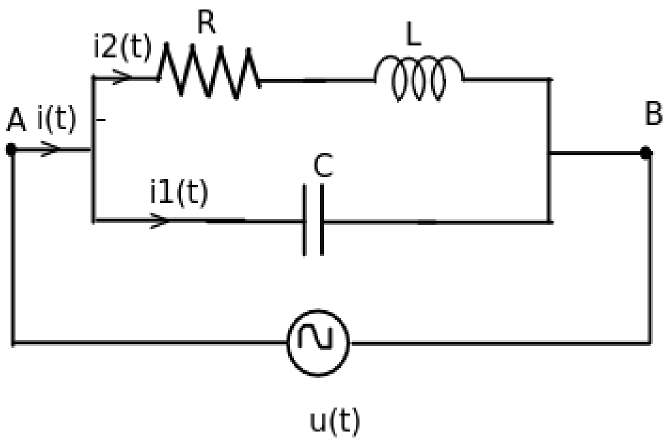


Figure 5

Exercice 5

1. Un générateur de tension sinusoïdale alternative $u(t) = cos(\omega t)$ et d'impédance interne $\underline{Z} = R + jX$ alimente une impédance de charge $\underline{Z'} = R' + jX'$ (Figure 6).
   (a) Déterminer la puissance complexe $\underline{S}$ et la puissance active P reçue par la charge $\underline{Z'}$.
   (b) A quelle condition sur $\underline{Z'}$ la puissance P est-elle maximale ? (On dit que l'impédance de la charge est adaptée sur celle du générateur).
   Calculer P_{max}.
2. Le générateur précédent a maintenant une impédance interne réelle $\underline{Z} = R_g$ et doit alimenter une charge réelle avec $R_L \neq R_g$.
   Pour réaliser l'adaptation en puissance, on propose d'intercaler entre le générateur et la charge un circuit L-C selon le montage ci-dessous (Figure 7) :
   (a) Écrire la condition du 1-(b) et en déduire les valeurs de L et C.
   (b) Peut-on adopter ce montage pour réaliser l'adaptation de la charge sur celle du générateur ?
   Si oui sous quelle condition ?

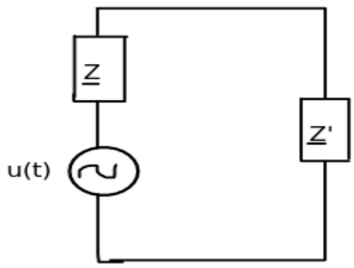


Figure 6

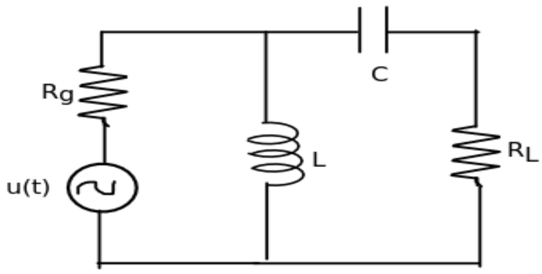


Figure 7

Exercice 1

1) Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit

$$\underline{Z} = jL_1\omega + \underline{Z}_2$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{jL_2\omega} + jC\omega = \frac{1-L_2C\omega^2}{jL_2\omega}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{jL_2\omega}{1-L_2C\omega^2}$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = j\left(L_1\omega + \frac{L_2\omega}{1-L_2C\omega^2}\right)$$

$$= j\omega\left(\frac{L_1+L_2-L_1L_2C\omega^2}{1-L_2C\omega^2}\right)$$

2) La valeur efficace du courant par courant L_1

Loi d'hom $\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I}_{L_1}$

$$\Rightarrow I_{L_1} = \frac{V}{Z} = \frac{V}{L_1\omega + \frac{L_2\omega}{1-L_2C\omega^2}}$$

$$I_{L_1} = \frac{V(1-L_2C\omega^2)}{\omega(L_1(1-L_2C\omega^2)+L_2)}$$

3) a)

$$I_{L_1} = 0 \Rightarrow \frac{V(1-L_2C\omega^2)}{\omega(L_1(1-L_2C\omega^2)+L_2)} = 0$$

$$\Rightarrow 1-L_2C\omega^2 = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{L_2\omega^2}$$

b) $I_{L_1} = \infty$

$$\Rightarrow L_1(1-L_2C\omega^2)+L_2 = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{L_1+L_2}{L_1L_2\omega^2} = C_0$$

4) a) cas particulier $L_1 = L_2 = L$ et $C > C_0$

$\varphi = \arg \underline{V} - \arg \underline{I}_{L_1}$

On a $\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I}_{L_1}$

$\arg \underline{V} = \arg \underline{Z} + \arg \underline{I}_{L_1}$

$\Rightarrow \arg \underline{V} - \arg \underline{I}_{L_1} = \arg \underline{Z} = \varphi$

on a $\underline{Z} = j\omega\left(\dfrac{L_1 + L_2 - L_1 L_2 C\omega^2}{1 - L_2 C\omega^2}\right)$

$L_1 = L_2 = L \Rightarrow \underline{Z} = j\omega\left(\dfrac{2L - L^2 C\omega^2}{1 - LC\omega^2}\right) = j\omega \dfrac{L(2 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2}$

$\underline{Z}$ est imaginaire pur, donc $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

on a encore $C_0 = \dfrac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 \omega}$, pour $L_1 = L_2 = L \Rightarrow C_0 = \dfrac{2}{L\omega^2}$

$C > C_0 = \dfrac{2}{L\omega^2} \Rightarrow CL\omega^2 > 2 \Rightarrow 2 - CL\omega^2 < 0$

et aussi $1 - CL\omega^2 < 0$

alors $\dfrac{2 - CL\omega^2}{1 - LC\omega^2} > 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

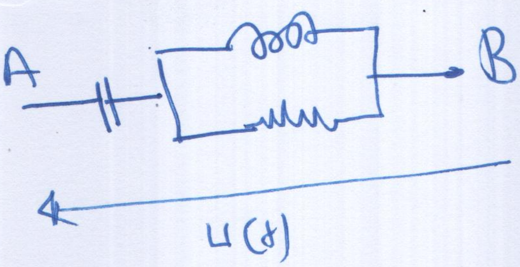
b) $v(t) = V_m \cos \omega t = V\sqrt{2} \cos \omega t$

$i(t) = I_{L_1}\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

avec $I_{L_1} = \dfrac{V(1 - LC\omega^2)}{L\omega(2 - LC\omega^2)}$

Exercice 2 :

1) Déterminer l'impédance complexe équivalente du circuit R-L parallèle



$$\frac{1}{\underline{Z}_{L\parallel R}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R}$$

$$= \frac{R + jL\omega}{jL\omega R}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{L\parallel R} = \frac{jL\omega R}{R + jL\omega}$$

2) $\underline{Z}_T = \frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}_{L\parallel R} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{jL\omega R}{R + jL\omega}$

3) Le courant complexe $\underline{I}_C$

On a $\underline{U} = \underline{Z}_T \underline{I}_C \Rightarrow \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{jL\omega R}{R + jL\omega}}$

4) $\underline{U}_R = R\underline{I}_R = \underline{Z}_{L\parallel R} \underline{I}_C$

$$\Rightarrow \underline{I}_R = \frac{\underline{Z}_{L\parallel R}}{R} \underline{I}_C = \frac{jL\omega R}{R(R + jL\omega)} \times \frac{\underline{U}}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{jL\omega R}{R + jL\omega}}$$

$$= \frac{jL\omega \underline{U}}{\frac{R + jL\omega}{jC\omega} + jL\omega R}$$

$$= -\frac{L\omega^2 C \underline{U}}{R(1 - L\omega^2 C) + jL\omega} = \frac{L\omega^2 C \underline{U}}{R(LC\omega^2 - 1) - jL\omega}$$

5) Pour que $\underline{I}_R$ soit indépendant de R

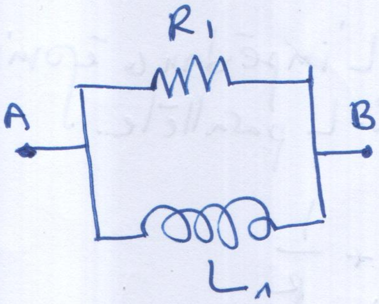
$$LC\omega^2 - 1 = 0 \Rightarrow LC\omega^2 = 1$$

d'où $\underline{I}_R = \frac{L\omega^2 C}{-jL\omega} = jC\omega \underline{U} = \frac{\underline{U}}{\frac{1}{jC\omega}}$

Exercice 3

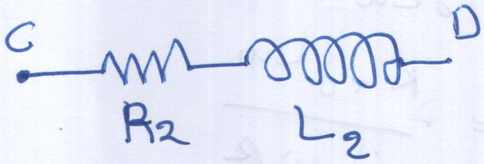
1-

a) $\underline{Z}_{AB} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{jL_1\omega} + \dfrac{1}{R_1}} = j\dfrac{R_1L_1\omega}{R_1 + jL_1\omega}$



$$= \frac{(R_1 - jL_1\omega)(jR_1L_1\omega)}{R_1^2 + L_1^2\omega^2}$$

$$= \frac{R_1L_1^2\omega^2}{R_1^2+L_1^2\omega^2} + j\frac{R_1^2L_1\omega}{R_1^2+L_1^2\omega^2}$$



$$\underline{Z}_{CD} = R_2 + jL_2\omega$$

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{CD} \Rightarrow \mathrm{Re}(\underline{Z}_{AB}) = \mathrm{Re}(\underline{Z}_{CD})$$
$$\mathrm{Im}(\underline{Z}_{AB}) = \mathrm{Im}(\underline{Z}_{CD})$$

$$\Longrightarrow R_2 = \frac{R_1L_1^2\omega^2}{R_1^2+L_1^2\omega^2} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{R_1^2L_1}{R_1^2+L_1^2\omega^2}$$

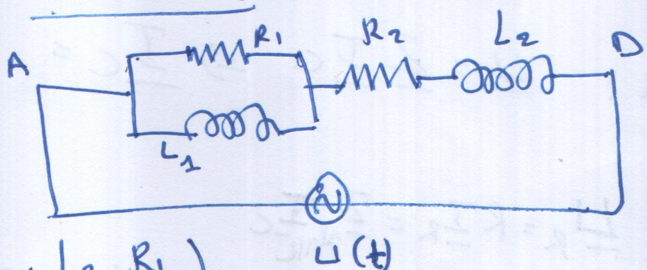
b) ω_0 pour laquelle $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{L_1}{L_2}$

D'après 1-a) $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_1^2+L_1^2\omega^2}{L_1^2\omega^2}$ et $\dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{R_1^2+L_1^2\omega^2}{R_1^2}$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{R_1^2+L_1^2\omega_0^2}{L_1^2\omega_0^2} = \frac{R_1^2+L_1^2\omega_0^2}{R_1^2}$$

$$\Longrightarrow L_1^2\omega_0^2 = R_1^2 \Longrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{R_1}{L_1}}$$

2) a) $\underline{Z}_{AD} = \underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{CD} = 2\underline{Z}_{AB}$



$$\Longrightarrow \underline{Z}_{AD} = 2(R_2 + jL_2\omega_0)$$

b) $\underline{Z}_{AD} = 2R_2\left(1 + j\dfrac{L_2\omega_0}{R_2}\right) = 2R_2\left(1 + j\underbrace{\dfrac{L_2}{R_2}\dfrac{R_1}{L_1}}_{=1}\right)$

On a $R_2 = \dfrac{R_1L_1^2\omega_0^2}{R_1^2+L_1^2\omega_0^2} = \dfrac{R_1}{1 + \dfrac{R_1^2}{L_1^2\omega_0^2}} = \dfrac{R_1}{1+1} = \dfrac{R_1}{2}$

$$\Rightarrow R_1 = 2R_2$$

$$\Longrightarrow \underline{Z}_{AD} = R_1(1+j).$$

c) $\underline{U} = \underline{Z}_{AD}\underline{I}$

$$I_m = \frac{U_m}{|\underline{Z}_{AD}|} = \frac{U_m}{R_1\sqrt{2}}$$

$\underline{U} = \underline{Z}_{AB}\,\underline{I} \Rightarrow \arg \underline{u} = \arg \underline{Z}_{AD} + \arg \underline{I}$

$\arg \underline{I} = \arg \underline{u} - \arg \underline{Z}_{AD}$

$\omega_0 t + \varphi = \omega_0 t - \arg \underline{Z}_{AD}$

$$\Rightarrow \varphi = -\arg \underline{Z}_{AD} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{I_m(\underline{Z}_{AD})}{R_e(\underline{Z}_{AD})}\right)$$

$$= -\operatorname{arctg} 1$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{U_m}{R_1\sqrt{2}}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right).$$

d) La capacité du condensateur qu'on doit mettre en série dans le circuit pour que $\varphi = 0$.

$$\underline{Z}'_{AD} = \underline{Z}_{AD} + \frac{1}{jC\omega_0} = R_1(1+j) - j\frac{1}{C\omega_0}$$

$$= R_1 + j\left(R_1 - \frac{1}{C\omega_0}\right)$$

pour que $\varphi = 0$ on doit avoir une impédance réelle.

$$\Rightarrow I_m(\underline{Z}'_{AD}) = 0 \Rightarrow R_1 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{R_1\omega_0}$$

e) $P_a = R_e(\underline{Z}'_{AD}) \cdot I_{eff}^2 = R_1 I_{eff}^2$

$$= R_1 \frac{U_m^2}{R_1^2 4} = \frac{U_m^2}{4R_1}$$

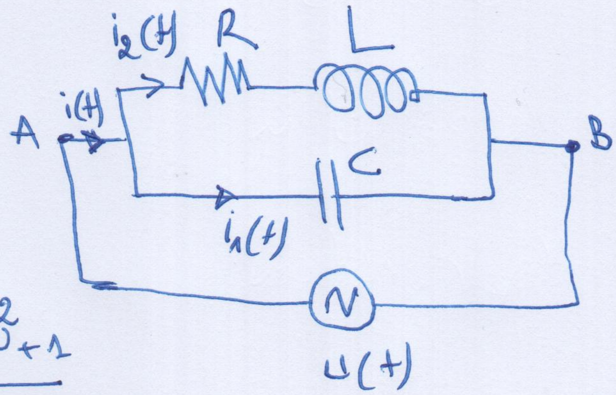
$P_r = I_m(\underline{Z}'_{AD}) \cdot I_{eff}^2 = 0$

L'intérêt est de compenser les pertes d'énergies le long des lignes de transport de courant électrique. Introduire le condensateur dans le circuit c'est un avantage pour les fournisseurs d'électricité.

Exercice 4 :

on a $u(t) = U_m \cos(\omega t)$, $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$

1- L'impédance complexe $\underline{Z}_{AB}$



$$\frac{1}{\underline{Z}_{AB}} = jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega}$$

$$= \frac{jC\omega(R+jL\omega)+1}{R+jL\omega} = \frac{RC\omega j - CL\omega^2 + 1}{R+jL\omega}$$

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{R+jL\omega}{1-CL\omega^2+jRC\omega}$$

2- $\underline{U} = \underline{Z}_{AB}\,\underline{I} \Rightarrow I = \frac{U}{|Z_{AB}|} = U\sqrt{\frac{(1-CL\omega^2)^2+(RC\omega)^2}{R^2+L^2\omega^2}}$

$\Rightarrow I = U\sqrt{\frac{(1-CL\omega^2)^2+(RC\omega)^2}{R^2+L^2\omega^2}}$ est l'intensité efficace I du courant $i(t)$.

3- $$\underline{Z}_{AB} = \frac{R+jL\omega}{1-CL\omega^2+jRC\omega} = \frac{(R+jL\omega)(1-CL\omega^2-jRC\omega)}{(1-CL\omega^2)^2+(RC\omega)^2}$$

$$= \frac{R(1-CL\omega^2) - jR^2C\omega + jL\omega(1-CL\omega^2-jRC\omega)}{(1-CL\omega^2)^2+(RC\omega)^2}$$

$$= \frac{R - R\cancel{C}L\omega^2 - jR^2C\omega + jL\omega - jCL^2\omega^3 + L\cancel{R}C\omega^2}{(1-CL\omega^2)^2+(RC\omega)^2}$$

$$= \frac{R + j(L\omega - CL^2\omega^3 - R^2C\omega)}{(1-CL\omega^2)^2+(RC\omega)^2}$$

l'expression ~~des~~ déphasage de la tension $u(t)$ par rapport à $i(t)$ est :

$$\varphi = \arctg\left(\frac{L\omega(1-CL\omega^2) - R^2C\omega}{R}\right)$$

4- les intensités efficaces I_1 et I_2 en fonction de la tension efficace U

on a : $\underline{U} = (R + jL\omega)\underline{I_2}$ et $\underline{U} = \dfrac{\underline{I_1}}{jC\omega}$

$$\Rightarrow I_1 = C\omega U \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

5- Pour que le courant soit en phase avec la tension, il faut que $\varphi = 0$.

càd $L\omega(1 - CL\omega^2) - R^2C\omega = 0$

$$L(1 - CL\omega^2) - R^2C = 0 \Rightarrow L - R^2C = CL^2\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{L - R^2C}{CL^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{L - R^2C}{CL^2}}$$

La condition est réalisable si $L - R^2C \geqslant 0$

6- $\varphi = 0$ càd $I_m(\underline{Z_{AB}}) = 0$

$$\Rightarrow Z_{AB} = \frac{R}{(1 - CL\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{L - R^2C}{CL^2}}$$

$$= \frac{R}{\left(1 - \cancel{C}\cancel{L}\frac{(L - R^2C)}{\cancel{C}L^{\cancel{2}}}\right)^2 + R^2C^2\frac{(L - R^2C)}{CL^2}}$$

$$= \frac{R}{\left(\frac{\cancel{L - L + R^2C}}{L}\right)^2 + \frac{R^2C}{L} - \cancel{\frac{R^4C^2}{L^2}}} = \frac{R}{\frac{R^2C}{L}}$$

$$\Rightarrow Z_{AB} = \frac{RL}{R^2C} = \frac{L}{RC}$$

7- La puissance moyenne est :

$$P_a = Z_{AB}I^2 = \frac{L}{RC}I^2.$$

Exercice **5**

1- a) $\underline{Z} = R + jX$ et $\underline{Z}' = R' + jX'$

$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{U}' \underline{I}^*$ avec $\underline{U}' = \underline{Z}' \underline{I}$

$\Rightarrow \underline{S} = \frac{1}{2} \underline{Z}' \underline{I} \, \underline{I}^* = \frac{1}{2} \underline{Z}' |\underline{I}|^2 = \frac{1}{2} (R' + jX') |\underline{I}|^2$

on a aussi $\underline{U} = (\underline{Z} + \underline{Z}') \underline{I} \Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z} + \underline{Z}'}$

$\Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{(R+R') + j(X+X')}$ et $|\underline{I}|^2 = \frac{U^2}{(R+R')^2 + (X+X')^2}$

$\Rightarrow \underline{S} = \frac{1}{2} \frac{(R' + jX') U^2}{(R+R')^2 + (X+X')^2}$

La puissance active est $P = Re(\underline{S}) = \frac{1}{2} \frac{R' U^2}{(R+R')^2 + (X+X')^2}$

1- b) La puissance P est maximale si $X + X' = 0$ ou $R + R' = 0$

$R' + R = 0$ est impossible et on a $X = -X'$

pour $X = -X' \Rightarrow P = \frac{1}{2} \frac{R' U^2}{(R+R')^2}$

alors on doit chercher la relation entre R et R' pour que P soit maximale

P est max $\Rightarrow \frac{dP}{dR'} = 0 = \frac{U^2}{2} \frac{\left[(R+R')^2 - 2R'(R+R') \right]}{(R+R')^4}$

$\Rightarrow = \frac{U^2}{2} \left(\frac{R + R' - 2R'}{(R+R')^3} \right) = \frac{U^2}{2} \frac{(R - R')}{(R+R')^3} = 0$

$\Rightarrow R = R'$

L'impédance de la charge est adaptée sur celle du générateur pour $R = R'$ et $X' = -X$ càd $\underline{Z}' = \underline{Z}^*$

et $P_{max} = \frac{U^2}{8R'}$

2) $\underline{Z} = R_g$ et $R_L \neq R_g$

2-a) La condition du 1-b) est : $\underline{Z}' = \underline{Z}^* \Rightarrow \underline{Z}' = R_g$

on a $\dfrac{1}{\underline{Z}'} = \dfrac{1}{jL\omega} + \dfrac{1}{R_L + \frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{1}{jL\omega} + \dfrac{jC\omega}{1 + jC\omega R_L}$

$$= \frac{1 + jC\omega R_L - LC\omega^2}{jL\omega - LCR_L\omega^2}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}' = \frac{-LCR_L\omega^2 + jL\omega}{(1 - LC\omega^2) + jC\omega R_L} = R_g$$

$$\Rightarrow -R_L LC\omega^2 + jL\omega = R_g(1 - LC\omega^2) + jC\omega R_L R_g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -R_L LC\omega^2 = R_g(1 - LC\omega^2) \\ L\omega = C\omega R_L R_g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} LC\omega^2(R_g - R_L) = R_g & (1) \\ R_g R_L = \frac{L}{C} \Rightarrow L = R_g R_L C & (2) \end{cases}$$

on remplace L dans la première équation

$$\Rightarrow (R_g - R_L) R_g R_L C^2 \omega^2 = R_g \Rightarrow C^2 = \frac{1}{\omega^2 R_L (R_g - R_L)}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega\sqrt{R_L(R_g - R_L)}}$$

$$\text{et } L = \frac{R_g R_L}{\omega\sqrt{R_L(R_g - R_L)}} = \frac{R_g}{\omega}\sqrt{\frac{R_L}{R_g - R_L}}$$

2-b) Ce montage peut être adopté à condition que

$$R_g - R_L > 0 \Rightarrow \boxed{R_g > R_L}$$