Université My ISMAIL
F.S.T. d'Errachidia
Département de Physique

Parcours M.I.P. S4
Module P147

T.D. de Mécanique Quantique

Série n° 1

Exercice 1:Rayonnement du corps noir

1/- On rappelle que la densité d'énergie du champ électromagnétique se produisant dans le volume intérieur du corps noir est donnée par:

$$\xi_T^{R-J}(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{C^3}\nu^2 \qquad \text{(modèle de Rayleigh-Jeans)}$$

et par:

$$\xi_T^{P}(\nu) = \frac{8\pi h}{C^3}\frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \qquad \text{(modèle de Planck)}$$

Montrer qu'à basse fréquence, la formule de Planck peut être approchée par celle de Rayleigh-Jeans.

2/- Dans la théorie de Planck, la loi de répartition spectrale du rayonnement du corps noir est telle que la probabilité qu'un photon ait une fréquence comprise entre ν et $\nu+d\nu$ dans la cavité du corps noir à la température T soit égale à:

$$d\,\Pr = \rho(\nu, T)d\nu = a\xi_T^P(\nu)d\nu$$

a- Calculer le coefficient de proportionnalité a. (on donne: $\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$)

b- Evaluer la loi de répartition spectrale de Planck du rayonnement du corps noir en termes de la longueur d'onde λ et T (c-à-d calculer $\tilde{\rho}(\lambda, T)$)

c- Donner la relation qui détermine λ_m pour laquelle $\tilde{\rho}(\lambda, T)$ est maximum.

d- En assimilant le soleil à un corps noir et en admettant que le maximum d'intensité du spectre solaire se produit pour $\lambda_m = 0.5\mu$, calculer la température du soleil.

Serie (1)

Ex 1

1) La densité d'Energie du champs éléctromagnetique

$$\xi_T^{R-J}(\nu) = \frac{8\pi K_B T}{c^3} \cdot \nu^2 \quad \text{Modèle R-J}$$

$$\xi_T^{P}(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/K_B T) - 1} \quad \text{Modèle de Planck}$$

On cherche à Montrer que a basse fréquence la formule de Planck peut être approchée par celle de Rayleigh-Jeans :

Càd : Si $\nu \to 0$ alors $\xi_T^P \to \xi_T^{R-J}$?

Rapel : Developement limité :

au voisinage de 0 on a $e^x = 1 + x + O(x^2)$
càd au voisinage de 0 : $e^x \simeq 1 + x$

dans notre cas : Si $\nu \to 0$ alors $h\nu/K_B T \to 0$

d'où on peut prendre $x = h\nu / K_B \cdot T$

$\Rightarrow \exp(h\nu/K_B \cdot T) \simeq 1 + h\nu/K_B \cdot T$ (au v(0)

$\Rightarrow \exp(h\nu/K_B \cdot T) - 1 \simeq h\nu/K_B \cdot T$

$\Rightarrow \xi_T^P(\nu) \simeq \frac{8\pi \cancel{h}}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{\cancel{h}\nu/K_B T} \simeq \frac{8\pi K_B T}{c^3} \nu^2$

$= \xi_T^{R-J}(\nu)$

Toujours au voisinage de 0
càd à basse fréquence

Ex 1 Q 2)

Les données : $dP_r = \rho(\nu;T)\, d\nu = a\, \xi_T^{p}(\nu)\, d\nu$

a) Calculons le coefficient a qui represente la loi de Stefan

On a la probabilité Total $\int_0^{+\infty} dP_r = 1$

d'où $\int_0^{+\infty} a\, \xi_T^{p}(\nu)\, d\nu = 1$

$$\Rightarrow a \int_0^{+\infty} \xi_T^{p}(\nu)\, d\nu = 1$$

$$\Rightarrow a \int_0^{+\infty} \frac{8\pi h}{C^3} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}\, d\nu = 1$$

$$\Rightarrow a \frac{8\pi h}{C^3} \int_0^{+\infty} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}\, d\nu = 1$$

Si on pose $x = \frac{h\nu}{k_B \cdot T} \Rightarrow \nu = x \frac{k_B \cdot T}{h} \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$

$$\Rightarrow a \frac{8\pi h}{C^3} \int_0^{+\infty} \frac{k_B^3 T^3}{h^3} \frac{x^3}{e^x - 1} \frac{k_B \cdot T}{h}\, dx = 1$$

ici les bornes 0 et $+\infty$ ne change pas car si $\nu = 0$ alors $x = 0$ et si $\nu \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty$ parceque $\frac{h}{k_B \cdot T} > 0$

$$\Rightarrow a \frac{8\pi \cancel{h}}{C^3} \cdot \frac{k_B^3 T^3}{h^3} \cdot \frac{k_B \cdot T}{\cancel{h}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx}_{= \frac{\pi^4}{15}} = 1$$

(d'aprés l'exercice)

$$\Rightarrow a \cdot \frac{8\pi}{C^3} \frac{k_B^4 T^4}{h^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{15\, C^3 h^3}{8\pi^5 k_B^4 \cdot T^4}}$$

Ex1 Q2 a) suite

La puissance totale rayonnée d'après Planck est :

$$P_T^P(\nu) = \int_0^{+\infty} S_T^P(\nu)\, d\nu$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} a\, S_T^P(\nu)\, d\nu$$

$$= \frac{1}{a} \underbrace{\int_0^{+\infty} d\,P_r(\nu)}_{=1}$$

$$= \frac{1}{a} = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15\, c^3 h^3}\, T^4$$

de mode σ_{th}

avec $\sigma_{th} = 7{,}62 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W\, m^{-3}\, K^{-4}}$

d'où $\boxed{P_T^P(\nu) = \sigma_{th} \cdot T^4}$ c'est bien la loi de Stefan-Boltzmann

Ex1 Q2 b)

Evaluation de la Loi de repartition spectrale de Planck du rayonnement du corps noir en fct de λ et T

Nous avons $dP_r = \rho(\nu,T)\,d\nu = \tilde{\rho}(\lambda,T)\,d\lambda$

avec $\rho(\nu,T) = a\, \xi_T^P(\nu)$

$$= a \times \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$$

or on a $\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\,d\lambda$

$$\Rightarrow \rho(\nu,T)\,d\nu = a\,\frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B \cdot T) - 1} \cdot d\nu$$

$$= a\,\frac{8\pi h}{c^3} \frac{c^3/\lambda^3}{\exp\left(\frac{hc}{k_B \cdot T \cdot \lambda}\right) - 1} \left(-\frac{c}{\lambda^2} d\lambda\right)$$

$$= \frac{15\,\cancel{c^3} h^3}{\cancel{8}\pi^5 k_B^4 T^4} \frac{\cancel{8\pi h}}{c^3} \frac{c^3}{\lambda^3} \frac{c}{\lambda^2} (-d\lambda) \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \cdot \lambda}\right) - 1}$$

$$= \frac{15\, h^4 c^4}{\pi^4 k_B^4 T^4 \lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k_B T \cdot \lambda} - 1} (-d\lambda)$$

motivation de (-)

ici le signe (-) est liée à $d\lambda$ car λ et ν sont inversement proportionnelle càd $\nu = \frac{c}{\lambda}$

si $\nu \to 0$ alors $\lambda \to +\infty$

et si $\nu \to +\infty$ alors $\lambda \to 0$

$$\int_0^{+\infty} \rho(\nu,T)\,d\nu = \int_{+\infty}^{0} \tilde{\rho}(\lambda,T)\,d\lambda = -\int_0^{+\infty} \tilde{\rho}(\lambda,T)\,d\lambda$$

$$= \int_0^{+\infty} \tilde{\rho}(\lambda,T)\,(-d\lambda)$$

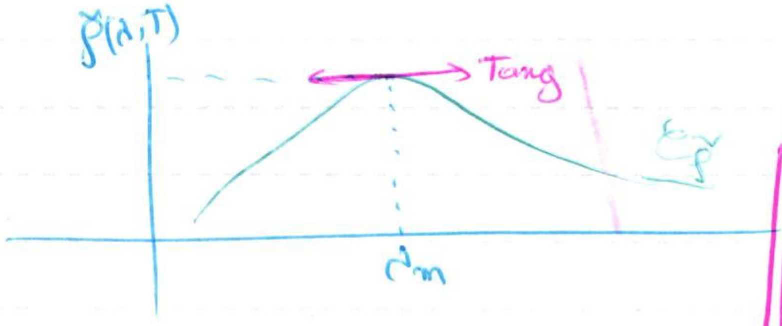
d'où $\tilde{\rho} = \frac{15 \cdot k_B \cdot T}{\pi^4 \cdot h \cdot c} \times \frac{\left(\frac{hc}{k_B \cdot T \cdot \lambda}\right)^5}{\exp\left(\frac{hc}{k_B \cdot T \cdot \lambda}\right) - 1} \geq 0$ (4)

Ex 1 - Q2 - C)

Cherchons λ_m pour que $\tilde{\rho}(\lambda;T)$ est maximum :

$\tilde{\rho}(\lambda,T)$ est maximum en $\lambda_m \Rightarrow \left.\dfrac{d\tilde{\rho}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_m} = 0$

car



Tangente horizontale $\Leftrightarrow$ pente $= 0 \Rightarrow \dfrac{d\tilde{\rho}}{d\lambda} = 0$ en λ_m

or $\tilde{\rho}(\lambda,T) = \dfrac{15 K_B T}{\pi^4 h c} \cdot \dfrac{\left(\frac{hc}{K_B T \cdot \lambda}\right)^5}{e^{hc/K_B T\lambda} - 1}$

posons $X = \dfrac{hc}{K_B . T . \lambda} \Rightarrow \tilde{\rho}(\lambda,T) = \dfrac{15 K_B T}{\pi^4 h c} \cdot \dfrac{X^5}{e^X - 1}$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{15 K_B T}{\pi^4 h c} \cdot \frac{5X^4 (e^X - 1) - X^5 e^X}{(e^X - 1)^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0$$

discution des cas :

1er cas : Si $\dfrac{\partial X}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow -\dfrac{hc}{K_B . T \lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda \to +\infty$

(Cas inacceptable)

2ème cas : $e^X - 1 \to +\infty \Rightarrow e^X \to +\infty$

$\Rightarrow X \to +\infty$

$\Rightarrow \lambda \to 0$

dans ce cas le corps noir est irradié

c'est un cas inutile

3ème cas :

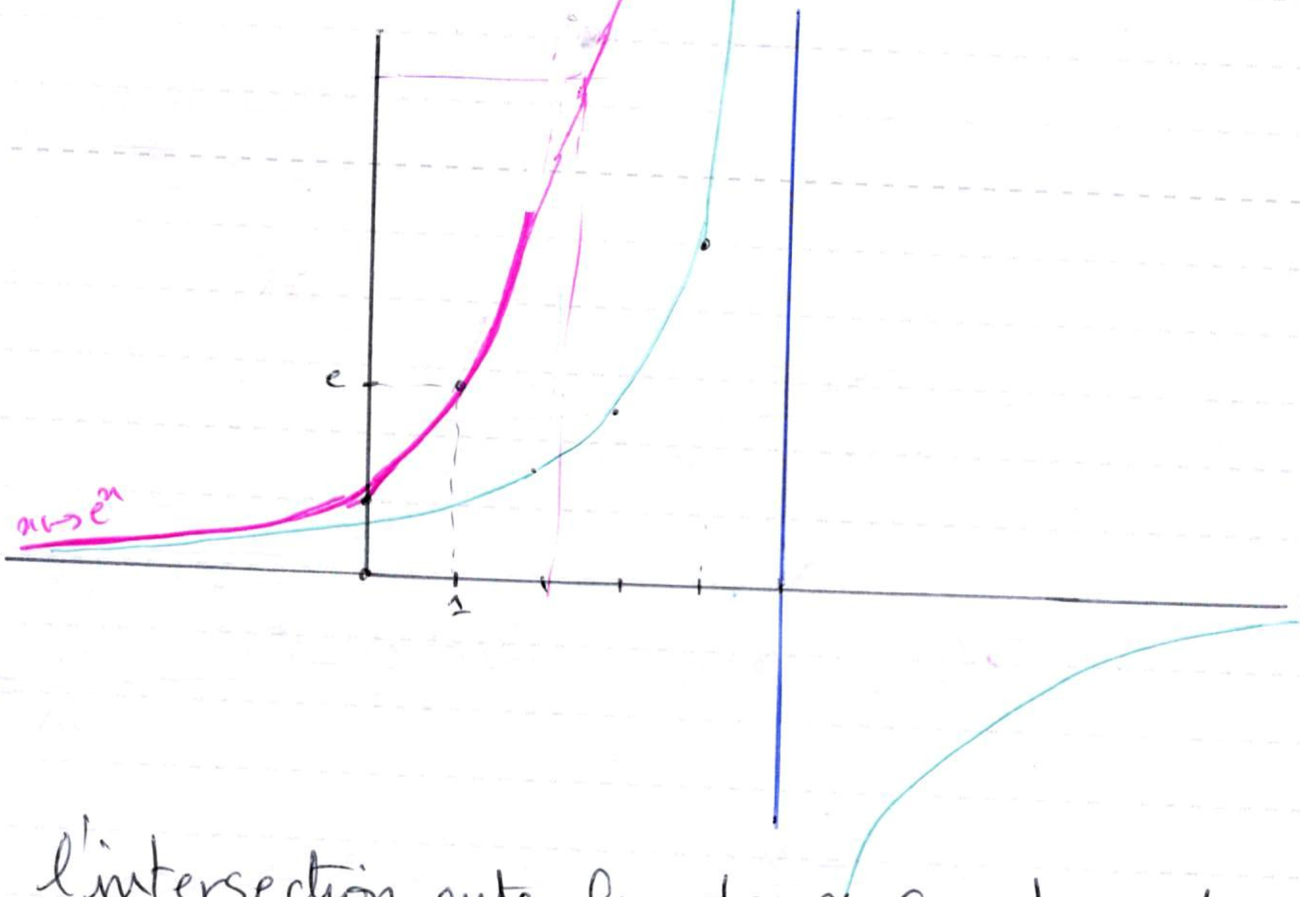
$$5X^4 (e^X - 1) - X^5 e^X = 0$$

$$\Rightarrow e^X (5X^4 - X^5) = 5X^4 \Rightarrow \boxed{e^X = \frac{5}{5 - X}}$$

cherchons la solution de cette equation :

EX1 - Q2 - C) Suite

Pour cela nous alons tracer la courbe de la fonction $x \mapsto e^x$ et la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{5}{5-x}$ et on va voir l'intersection



l'intersection entre les deux courbe est en $X = X_0 = 4,96$ m

$\Rightarrow \quad \lambda'_m = \frac{0,29}{T}$ (cm) ici $c = 3.10^8$ m/s
$h = 6,624 \cdot 10^{-34}$ JS
$K_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K.S

$\Rightarrow \boxed{\lambda_m \simeq 0,5 \mu m} = \frac{0,29}{T}$

$\Rightarrow \boxed{T = 5800 \, °K}$

EX 1 Q 2 d)

données :

Corps noir $\simeq$ Soleil

$\lambda_m = 0,5\ \mu m$

Question : Calculons la Température T du Soleil

d'aprés la question précédente

$$\lambda_m = \frac{0,29}{T}\ ?$$

Explication de 0,29 cm

la Solution $X = X_0 = 4,96$ m correspond à la valeur max λ_m

$$\Rightarrow \quad X_0 = \frac{hc}{K_B \lambda_m T} \Rightarrow K_B \lambda_M T = \frac{hc}{X_0}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_m = \frac{hc}{K_B X_0 T} = \frac{\frac{hc}{K_B X_0}}{T}$$

$$\frac{hc}{K_B X_0} = \frac{6,624 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 4,96} = 2,9 \cdot 10^{-3}\ m = 0,29\ cm$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{0,29\ cm}{\lambda_m (\mu m)} = \frac{0,29\ 10^{-2}}{0,5 \cdot 10^{-6}} = \boxed{5800\ °K}$$

__Exercice 2: Effet photoélectrique__

1/- Quelle est la puissance d'une lampe à filament incandescent qui emet un rayonnement dont la longueur d'onde moyenne est $\lambda = 1{,}2\mu$. On donne le nombre de photons émis par seconde par cette lampe, soit $N = 13 \times 10^{20}$.

2/- On éclaire la cathode d'une cellule photoélectrique par un rayonnement de longueur d'onde $\lambda = 0.405\mu$, elle débite alors un courant électrique i que l'on peut compenser en portant l'anode de cette cellule à un potentiel de 1.26 V plus bas que celui de la cathode. On demande le potentiel d'extraction et le seuil en fréquence de l'effet photoélectrique du matériau constituant la cathode.

Exercice 2 :

données :

Lampe à filament incandescent :

* Longeur d'onde Moyenne : $\lambda = 1,2\ \mu m$
* nbre de photons emis par la lampe : $N = 13 \cdot 10^{20}$

Question Calcule de la puissance rayonnée

P : la puissance rayonnée

On a P = Energie par unité de temp

= N x Energie d'un photon

$$\Rightarrow \quad P = N \cdot h\nu$$

$$\boxed{P = N \cdot h \cdot \frac{c}{\lambda}}$$

A-N : $P = 13 \cdot 10^{20} \times 6,624 \cdot 10^{-34} \times \dfrac{3 \cdot 10^{8}}{1,2 \cdot 10^{-6}}$

$$\boxed{P = 215,28\ J/S}$$

Serie 1 Ex2 _ 2):

Donneés

une cellule photoelectrique rayonneé par des rayon de longueur d'onde $\lambda = 0,405 \mu m$

un potentiel à l'anode : $V = 1,26 V$

Question

Calculons: le potentiel V_0 d'extraction

le seuil en frequence de l'EPE

D'après l'equation d'Einstein : $\boxed{E_K = h\nu - \varepsilon}$

avec ε : l'energie communiquer à l'elect pour le deplace vers l'anode

$\varepsilon = e.V$ (ε est noté dans le cours par W)

E_K : l'energie de l'e^- qui s'echappe du métale

$E_K = h\nu_0$

$\Rightarrow \quad h\nu_0 = h\nu - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad h\nu = h\nu_0 + \varepsilon$

En terme du potentiel : $\qquad h\nu = e.V_0 + e.V$

$\Rightarrow \quad e.V_0 = h\nu - e.V$

$\Rightarrow \quad V_0 = \dfrac{h\nu - eV}{e} = \boxed{\dfrac{h}{e\lambda} - V}$

A.N : $\boxed{V_0 = 1,8 \text{ volts}}$

Le seuil en frequence $\Rightarrow$ $\boxed{\nu_0 = \dfrac{e.V_0}{h}}$

AN : $\boxed{\nu_0 = 43504 \cdot 10^{10} Hz}$

9

serie 1 suite

Exercice 3: Effet Compton

On considère un faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde λ se déplaçant dans le vide et se dirigeant vers une cible ne contenant que des électrons libres que l'on supposera au repos.

Soit m la masse de l'électron et soit λ' la longueur d'onde de la lumière diffusée après les chocs photon-électron, posons $\alpha = \dfrac{h}{m_o C\lambda}$.

1/- Ecrire les équations de conservation de l'impulsion et de l'énergie lors d'un choc photon-électron.

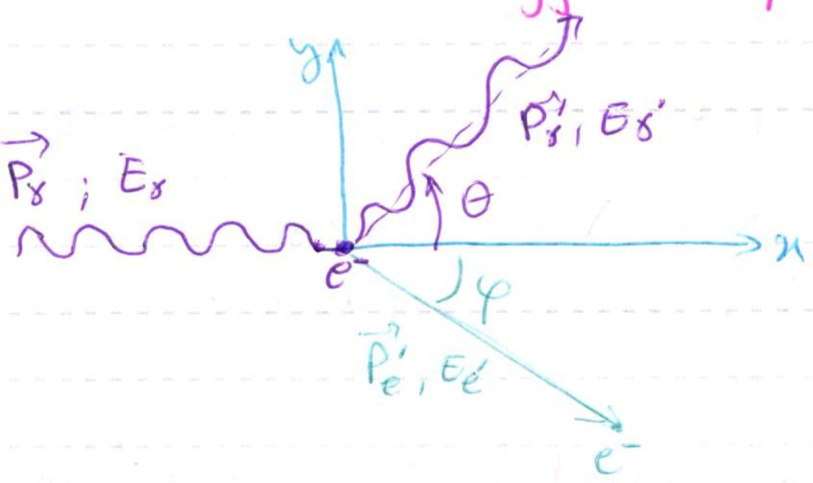
2/- Calculer la variation de la longueur d'onde $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ en fonction de λ, α et de l'angle θ que fait la direction du photon diffusé avec celle du photon incident.

3/- Calculer l'énergie du photon diffusé E_ν' en fonction de α et θ.

4/- Soit ϕ l'angle que fait la direction de l'électron après le choc avec celle du photon incident, on demande d'exprimer ϕ en fonction de α et θ.

5/- Dans le cas où $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Quelles sont les valeurs de λ', E_ν' et ϕ ?

Serie 1 : Ex 3 Effet compton



avec : $\alpha = \frac{h}{m_0 c \lambda}$

1) Les équations de conservation :

puisque le choc photon-électron est élastique donc on a conservation d'energie et d'impulsion

$$\begin{cases} (i) & E_{\gamma} + E_{e^-} = E_{\gamma}' + E_{e^-}' \\ (ii) & \vec{P}_{\gamma} + \vec{0} = \vec{P}_{\gamma}' + \vec{P}_{e^-}' \end{cases}$$

$\vec{0}$: Car l'électron libre est considéré au repos

→ Conservation d'énergie :

$$(i) \Rightarrow \boxed{h\nu + \underbrace{m_e c^2}_{\text{energie au repos de l'}e^-} = h\nu' + \underbrace{\sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2}}_{\text{energie relativiste (en mvt) de l'}e^-}} \quad (1)$$

→ Conservation du quantité de Mouvement :

Nous projetons la formule ii) sur les axes (ox) et (oy) :

$$\begin{cases} \text{Sur (ox)} & P_{\gamma} = P_{\gamma}' \cos\theta + P_e' \cos\varphi \\ \text{Sur (oy)} & 0 = P_{\gamma}' \sin\theta - P_e' \sin\varphi \end{cases}$$

or $P_{\gamma} = \frac{E_{\gamma}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ de m $P_{\gamma}' = \frac{h}{\lambda'}$

Serie 1, Ex3 ; Q1 suite :

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos\theta + P_e' \cos\varphi \\ 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin\theta - P_e' \sin\varphi \end{cases}}$$ (2)

2) Calcul de la variation de longueur d'onde $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ en fct de λ ; α et θ :

d'apres le systeme (2) on a :

$$\begin{cases} P_e' \cos\varphi = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos\theta \\ P_e' \sin\varphi = \frac{h}{\lambda'} \sin\theta \end{cases}$$

12

$$\Rightarrow \begin{cases} P_e'^2 \cos^2\varphi = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos\theta\right)^2 \\ + \\ P_e'^2 \sin^2\varphi = \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 \sin^2\theta \end{cases}$$

$$P_e'^2 \underbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}_{=1} = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h}{\lambda} \cdot \frac{h}{\lambda'} \cos\theta + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 \cos^2\theta + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow P_e'^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 \underbrace{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}_{=1} - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'} \cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{P_e'^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'} \cos\theta + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2}$$ (3)

Prenons la formule 1) $\Rightarrow \sqrt{m_e^2 c^4 + P_e'^2 c^2} = h\nu - h\nu' + m_e c^2$

Introduisant la puissance carré et remplaçons les frequences :

$$\Rightarrow m_e^2 c^4 + P_e'^2 c^2 = \left(h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda'} + m_e c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow P_e'^2 c^2 = h^2 c^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + 2hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) m_e c^2 + \cancel{m_e^2 c^4} - \cancel{m_e^2 c^4}$$

EX3 _ Q2 suite :

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_e'^2 = h^2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)^2 + 2\, m_e h c\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)} \quad (4)$$

$(3) = (4) \Rightarrow$

$$\cancel{\left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2} - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta + \cancel{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2} = \cancel{\frac{h^2}{\lambda'^2}} - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'} + \cancel{\frac{h^2}{\lambda^2}} + 2 m_e h c\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)$$

$$\frac{\cancel{2}h^{\cancel{2}}}{\cancel{\lambda\lambda'}}(1-\cos\theta) = \cancel{2} m_e \cancel{h} c\,\frac{(\lambda'-\lambda)}{\cancel{\lambda\lambda'}}$$

$$\Rightarrow \quad h(1-\cos\theta) = m_e c\,\Delta\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) = \frac{h}{m_e c\lambda}\,\lambda(1-\cos\theta)$$

posons $\alpha = \frac{h}{m_e c \lambda} \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \alpha\lambda(1-\cos\theta)}$

or $\cos\theta = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow \quad 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\lambda = 2\alpha\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

le nombre $\frac{h}{m_e c}$ s'appel longueur d'onde de Compton

$$\frac{h}{m_e c} \simeq 0{,}024\ \text{Å}$$

(ici $1\ \text{Å} = 10^{-10}$ m)

Serie 1 : Ex 3 suite

3) Calcul de l'energie E'_γ :

On a $E'_\gamma = h\nu' = h\frac{c}{\lambda'}$

or $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \alpha\lambda(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow \quad \lambda' = \alpha\lambda(1-\cos\theta) + \lambda$$

remplaçons dans E'_γ :

$$E'_\gamma = \frac{hc}{\alpha\lambda(1-\cos\theta)+\lambda} = \frac{hc}{\lambda(\alpha(1-\cos\theta)+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{E'_\gamma = \frac{h\nu}{\alpha(1-\cos\theta)+1}} \boxed{= \frac{E_\gamma}{\alpha(1-\cos\theta)+1}}$$

4) Expression de l'angle φ en fct de α et θ

Revenons au système ② : $\begin{cases} P'_e \cos\varphi = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\theta \\ P'_e \sin\varphi = \frac{h}{\lambda'}\sin\theta \end{cases}$ $\div$

$$\tan\varphi = \frac{\frac{h}{\lambda'}\sin\theta}{\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\theta} \overset{\cancel{h}}{=} \frac{\frac{1}{\lambda'}\sin\theta}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\cos\theta} \overset{\times\lambda'}{=} \frac{\sin\theta}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos\theta}$$

or $\sin\theta = \sin(2\frac{\theta}{2}) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

et $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\alpha\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}$ $\Rightarrow \lambda' = 2\alpha\lambda\sin^2\frac{\theta}{2} + \lambda$

$\Rightarrow \lambda' = \lambda(2\alpha\sin^2\frac{\theta}{2} + 1)$

$\Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} = 2\alpha\sin^2\frac{\theta}{2} + 1$

et $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

Serie 1 Ex 3 Q 4 suite

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\alpha\sin^2\frac{\theta}{2}\cancel{+1}\cancel{-1}+2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cancel{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}{\cancel{2}(\alpha+1)\sin^{\cancel{2}}\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{(\alpha+1)\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{1}{(1+\alpha)\tan\frac{\theta}{2}}}$$

5) Cas où $\theta = \pi/2$

$$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{1}{1+\alpha}}$$

$$\lambda' = \lambda\left(2\alpha\sin^2\frac{\theta}{2}+1\right)$$

$$= \lambda\left(2\alpha\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+1\right)$$

$$= \lambda\left(2\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1\right)$$

$$\boxed{\lambda' = \lambda(2\alpha+1)}$$

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{\alpha(1-\cos\theta)+1} = \frac{E_\gamma}{\alpha(1-0)+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{\alpha+1}}$$

Fin ex 3

Exercice 4: Emission photonique

Considérons l'annihilation d'un électron e^- ($q=-e$, $m=m_e$) et d'un positron e^+ ($q=e$, $m=m_e$) avec émission de photons γ: $e^+ + e^- \rightarrow n\gamma$

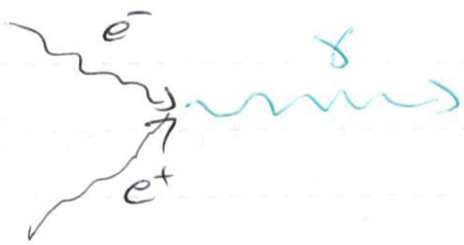
1/- Pour quelles valeurs de n, la réaction peut-elle se produire ? On suppose que e^- et e^+ sont pratiquement au repos quand la réaction se produit.

2/- Calculer la fréquence et la longueur d'onde supposée communes aux photons émis. Cas où n=2.

Serie ①

Exercice 4 : Emission photonique

$$e^+ + e^- \longrightarrow n\gamma$$



1) Il s'agit ici d'un choc inélastique puisque e^+ et e^- ont totalement changés
donc il y a conservation du quantité de Mouvement

au repos : $\vec{0} + \vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_{\gamma_i}$

Si $n=1$ alors $\vec{P}_\gamma = 0 \Rightarrow$ photon au repos absurde avec les données (emission d'un photon)

donc $n \geqslant 2$
la somme des vecteurs non nuls est nulle si $n \geqslant 2$

d'où apartir de $n=2$ la réaction peut-être se produise.

2) Calculons la fréquence et la longueur d'onde des photons dans le cas où $n=2$

Puisque le choc est inélastique alors l'energie avant le choc se transforme completement en énergie de rayonnement émis :

Serie 1) Ex4) Q2) suite

$\Rightarrow \quad E_{e^+} + E_{e^-} = n\,E_\gamma = n\,h\nu$

Puisque e^+ et e^- sont au repos donc ils ont (m) l'énergie

$E_{e^+} = E_{e^-} = m_e c^2$

$\Rightarrow \quad 2\,m_e c^2 = n\,h\,\nu$

$\Rightarrow \quad \nu = \dfrac{2 m_e c^2}{n\,h} = \boxed{\dfrac{1}{n}\;\dfrac{2 m_e c^2}{h}}$

pour $n = 2$:

$$\boxed{\nu_{max} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2} m_e c^2}{h} = \frac{m_e c^2}{h}}$$

or $\lambda_{max} = \dfrac{c}{\nu_{max}} = \dfrac{\cancel{c}}{m_e \dfrac{c^{\cancel{2}}}{h}} = \boxed{\dfrac{h}{m_e c}}$

A.N : $\boxed{\lambda_{max} = 0{,}024\ \text{Å}}$ c'est la longueur d'onde de compton

Fin Ex4

Fin Serie 1