Université My ISMAIL
F.S.T. d'Errachidia
Département de Physique

Parcours M.I.P. S4
Module P147

T.D. de Mécanique Quantique

Série n° 2

Exercice 1:Loi de Balmer dans le modèle de Bohr

1/- Donner en introduisant la règle des quanta de Bohr les rayons r_n des orbites quantifiées de l'électron dans l'atome d'hydrogène.

2/- Calculer les niveaux d'énergie quantifiées E_n de l'atome d'hydrogène. On admettra que l'énergie potentielle électrostatique de l'électron s'annule lorsque celui-ci devient suffisamment loin du noyau.

3/- En déduire la valeur théorique de la constante de Rydberg de la loi de Balmer. La comparer à sa valeur empirique, conclusion.

On donne la masse de l'électron m_e=0.9 10^{-30} kg, sa charge électrique e=-1.6 10^{-19} C, la constante de Coulomb K=9 10^9 Nm^2C^{-2}, la constante de Planck h=6.62 10^{-34} Js et la valeur empirique de la constante de Rydberg R=10967800 m^{-1}.

Exercice 2: Les ondes de matière de Louis de Broglie

Règle des quanta de Bohr

Buts
- décrire la discontinuité des spectres lumineux des atomes
- Resoudre le problème de la stabilité de la matière.

Idée Quantification des niveaux d'energie des électrons autour du noyau

Postulats

▶ Pb des spectres discrets $|\sigma| = n\hbar$

Bohr postule que l'électron ne peut se trouver que sur les orbites de rayon

$$\boxed{r_n = \frac{n\hbar}{m_e \cdot v_e}}$$

$n \in \mathbb{N}^*$
m_e : la masse de e^-
v_e : la vitesse de e^-

▨ Pb de stabilité

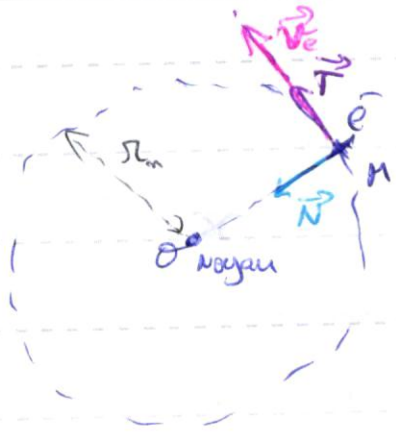
Bohr admet que sur l'une des orbites Quantifiées l'électron ne rayonne pas

Conséquences:

↳ Postulat ▶ ⇒ Quantification d'énergie de e^-
c.a.d: Quantification du moment cinetique de e^- autour du noyau

En effet :

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}_e}$$



- Règle des quanta de Bohr

.. $\vec{OM} \perp \vec{v}_e$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left[\sigma_O(M)\right]_n = r_n \cdot m_e \cdot v_e} \qquad n \in \mathbb{N}$$

↳ Postulat ⇒ Pas d'absorption ou d'émission de la lumière par l'atome sauf lors de la transition de l'électron d'un état quantique à un autre

En effet soient E_n les états d'énergie alors :

- Les E_n sont des états stationnaire parce que l'e^- ne rayonne pas sur un état quantique
- Soient $E_n > E_m > E_l$

Le passage de E_n vers E_m ⇒ Emission d'un photon de fréquence ν_{nm} tq : $h\nu_{nm} = E_n - E_m > 0$

Le passage de E_l vers E_m ⇒ Absorption d'un photon de fréquence ν_{lm} tq $h\nu_{lm} = E_m - E_l > 0$

En générale:

$$h\nu_{K\ell} = |E_K - E_\ell| = \begin{cases} E_K - E_\ell & \text{si } E_K > E_\ell \\ E_\ell - E_K & \text{si } E_K < E_\ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \nu_{K\ell} = \begin{cases} \frac{E_K}{h} - \frac{E_\ell}{h} & : \text{Emission} \\ \frac{E_\ell}{h} - \frac{E_K}{h} & : \text{Absorption} \end{cases}$$

Remarque

√ Modèle de Bohr
- → La loi de combinaison de Ritz avec des nombres spectraux $|T_K| = \frac{E_K}{h}$
- → La loi empirique de Balmer

$$\frac{CR}{K^2} = -\frac{E_K}{h}$$

√ Modèle de Bohr pour l'atome d'hydrogène

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{k m_e e^2} \quad \text{et} \quad E_n = -\frac{k^2 m_e e^4}{2 n^2 \hbar^2}$$

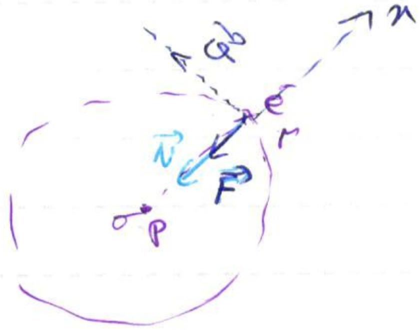
avec k : la cte de coulomb $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ SI

√ Balmer → relation qui relie les longueurs d'ondes des raies spectrale de l'atome d'hydrogène
= transition des niveaux excité $m > 2$ vers l'état quantique $n=2$: $\lambda_m = B \frac{m^2}{m^2 - n^2}$

Rydberg → généralisation $m \in \mathbb{N}$: $\lambda_{m,n} = \frac{B}{4} \frac{m^2 \times n^2}{m^2 - n^2}$

Serie N° 2

Exercice 1



1) Regle des quanta de Bohr :

$$\begin{cases} \vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \\ |\vec{\sigma}| = n\hbar \end{cases}$$

$$|\vec{\sigma}| = |\vec{OM} \wedge m\vec{v}| = |\vec{r} \wedge m\vec{v}| = n\hbar$$

$$\Rightarrow r \cdot m v \cdot \sin \frac{\pi}{2} = n\hbar \Rightarrow r \cdot m \cdot v = n\hbar$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{n\hbar}{m \cdot v}} \quad (1)$$

cherchons v ?

PFD $\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}_n$

On a juste une seul force qui est la force de coulomb $\vec{F}_{coul}$ $\Rightarrow$
$$\vec{F}_{coul} = m\vec{\gamma}_n$$

Projetons sur l'axe (Ox) : $-F_{coul} = -m\gamma_n$

$$F_{coul} = \frac{\overbrace{k}^{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\ \overbrace{|q_1|}^{e^-}\ \overbrace{|q_2|}^{\text{proton}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

$$F_{coul} = \frac{ke^2}{r^2}$$

$\gamma_n = \frac{v^2}{r}$ acceleration centripète = acceleration d'un e⁻ dans un orbite stable

Serie 2 Ex 1 1) suite

$$\Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{k e^2}{r^2} \Rightarrow m v^2 = \frac{k e^2}{r} \quad ①$$

$$\Rightarrow \boxed{m^2 v^2 = \frac{m k e^2}{r}} \quad ②$$

$$①^2 \Rightarrow \quad r^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 v^2} \overset{②}{=} \frac{n^2 \hbar^2}{\frac{m k e^2}{r}}$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{n^2 \hbar^2 r}{m k e^2} \Rightarrow \boxed{r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m \cdot k \cdot e^2}}$$

d'où les rayons des orbites dans l'atome d'hydrogène sont quantifiés.

2) Calculons les niveaux quantifiés d'Energie E_n

L'energie Totale : $E = E_c + E_p$

* $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

* E_p ?

- La force de Coulomb $\vec{F}_{coul}$ derive d'un potentiel

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p$$

- La force de Coulomb $\vec{F}_{coul}$ est portée sur l'axe (Ox) $\Rightarrow$

$$\vec{F} = \begin{cases} F_r = -F \\ F_\theta = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$ dans le système cylindrique

EX 1 Serie 2 Q 2 Suite

$$\vec{F_c} = -\overrightarrow{grad}\, E_p \overset{norme}{\Rightarrow} F_c = \frac{\partial E_p}{\partial r}$$

d'aprés question 1) $F_c = K\frac{e^2}{r^2} \Rightarrow$

$$\frac{Ke^2}{r^2} = \frac{\partial E_p}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial r} = K\frac{e^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = -K\frac{e^2}{r} + cte}$$

or d'aprés l'enoncé d'exercice $E_p(\infty) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{Ke^2}{\infty} + cte = 0 \Rightarrow 0 + cte = 0 \Rightarrow \boxed{cte = 0}$$

d'où $\boxed{E_p = -\frac{Ke^2}{r}}$

L'energie Totale: $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Ke^2}{r}$

or d'aprés la question 1 relation ⊙ ona

$$mv^2 = \frac{Ke^2}{r} \Rightarrow E_n = \frac{1}{2}\frac{Ke^2}{r} - \frac{Ke^2}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = -\frac{1}{2}K\frac{e^2}{r_n}}$$

Remplaçons r_n par sa valeur on trouve alors

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2}Ke^2 \times \frac{m.K.e^2}{n^2\hbar^2} = -\frac{1}{2}\frac{K^2e^4.m}{n^2\hbar^2}} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$E_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$n=1$: $E_1 = \frac{-K^2e^4m}{2n^2\hbar^2} = -13,6$ e.V

$$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{E_1}{n^2} = \frac{-13,6}{n^2}\text{ e.V}}$$

3) Loi de Balmer (voir complement de cours)

$$h\nu_{n,\ell} = E_n - E_\ell \qquad E_n > E_\ell$$

$\Rightarrow$

Balmer: $\frac{CR}{n^2} = -\frac{E_n}{h} \Rightarrow E_n = -\frac{CRh}{n^2}$

~~et~~ d'apres 1) : $E_n = \frac{-k^2 e^4 m}{2n^2 \hbar^2}$

$$\Rightarrow \cancel{-}\frac{CRh}{\cancel{n^2}} = \cancel{-}\frac{k^2 e^4 m}{2\cancel{n^2}\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{th} = \frac{k^2 e^4 m}{2\hbar^2 . c . h}}$$

A.N: $R_{th} = \frac{(9.10^9)^2 . (1,6)^4 (10^{-19})^4 . 0,9.10^{-30} \; 4\pi^2}{2 . (6,62.10^{-34})^3}$

$R_{th} = 109\,500 \text{ cm}^{-1}$ et $R_{exp} = 109\,678 \text{ cm}^{-1}$

$\Rightarrow R_{th} \simeq R_{exp}$

$\Rightarrow$ le modèle de Bohr reproduit avec accord l'experience de Balmer-Rydberg.

Université My ISMAIL
F.S.T. d'Errachidia
Département de Physique

Parcours M.I.P. S4
Module P147

T.D. de Mécanique Quantique

Série n° 2

Exercice 2: Les ondes de matière de Louis de Broglie

1/- Considérons un grain de poussière de diamètre $d=1\mu$, de masse $m=10^{-12}$g et animé d'un mouvement de vitesse moyenne $v=3$mm/s.

Quelles sont la longueur d'onde λ et la fréquence ν associée à cette particule ? Dire si le traitement physique de cette particule peut relever de la mécanique classique.

2/- Mêmes questions pour un véhicule de masse $m=3$ Tonnes, de longueur $l=6$m et roulant à une vitesse $v=60$ km/h.

3/- En considérant les électrons accélérés sous l'effet d'une tension électrique continue $V=100$ Volts comme des particules non-relativistes, calculer la vitesse qu'aquiert chacun d'eux. Calculer la longueur λ de l'onde de Broglie associée au mouvement de ces électrons. Conclusion ?

Généralité sur l'ordre de grandeur d

Définition

l'ordre de grandeur d'une valeur correspond à la puissance de dix se rapprochant le plus de cette valeur

Methode :

Soit N un nombre

1) Ecrivant N sous la forme scientifique

$$\boxed{N = a \times 10^{b}}$$

2) On distingue deux cas :

- si $a < 5$ alors a doit être remplacer par 1 et on a $d = 10^{b}$
- si $a > 5$ alors a doit être remplacer par 10 et on a $d = 10 \cdot 10^{b} = 10^{b+1}$

Exemples :

1) $N = 1055{,}8 \text{ m} \Rightarrow N = 1{,}0558 \cdot 10^{3} \text{ m}$

or $1{,}0558 < 5 \Rightarrow \boxed{d = 10^{3} \text{ m}}$

2) $N = 67{,}63 \cdot 10^{-6} \text{ m} \Rightarrow N = 6{,}763 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-6} \text{ m}$

$\Rightarrow N = 6{,}763\ 10^{-5} \text{ m}$

or $6{,}763 \geqslant 5 \Rightarrow d = 10 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

$\Longrightarrow \boxed{d = 10^{-4} \text{ m}}$

Serie 2)

Exercice 2

1) **données** grain de Poussière de diamètre $d = 1\,\mu m$
de masse $m = 10^{-12} g$ de vitesse moyenne $v = 3\,mm/s$

Cherchons la longueur d'onde et la fréquence ν ?

Rappel

- D'après Louis de Broglie, à toute particule matérielle on peut associer une onde de Longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v}$

- Si $\lambda \simeq d \longrightarrow$ Mecanique quantique
  Si $\lambda \ll d \longrightarrow$ Mecanique classique

- $v \ll c$: Mouvement Non relativiste $p = m_0 v$
  $v \to c$: Mouvement relativiste $p = m v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v$

dans notre cas la vitesse v est negligeable devant la vitesse de la lumière c d'où le mvt est non relativiste

$\Rightarrow \quad p = m_0 v$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v}}$

A.N : $\lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{10^{-12} \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = \frac{6,62}{3} \cdot 10^{-16}$

$= 2,2 \cdot 10^{-16} m = 2,2 \cdot 10^{-10} \mu m$

On remarque que $\lambda \ll d = 1\,\mu m$

d'où le traitement sera classique.

N.B : La relation $\nu = \frac{c}{\lambda}$ est valable pour les vitesse de phase v_φ égale à c

En effet, * pour le photon $\nu = \frac{c}{\lambda}$

* Pour autre particule

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \nu\lambda$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{v_\varphi}{\lambda} \quad ; \quad v_\varphi \ ?$$

$\Rightarrow$ On ne peut pas dans ce cas calculer la frequence

2) données véhicule de masse $m = 3T$, longueur $l = 6m$, $V = 60 Km/h$

Question: calculons la longueur d'onde et la fréquence

- $$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 10^3 \times \frac{1}{3600}}$$

$$= \frac{6,62 \times 360\cancel{0} \cdot 10^{-34}}{18\cancel{0} \cdot 10^6} =$$

$$= 132,4 \cdot 10^{-40} \ m$$

$$\boxed{\lambda = 1,32 \cdot 10^{-38} \ m}$$

l'ordre de grandeur d : $l = 6 \cdot 10^0 \ m$

puisque $6 \geq 5 \Rightarrow 6$ est remplacer par 10

$$\Rightarrow \boxed{d = 10 \cdot m}$$

$\Rightarrow \lambda <<< d$ d'où le traitement est aussi classique.

Même justification que la question 1) pour la frequence ν

Serie 2) Ex2) Q3)

3) **Données** Electrons non relativiste
tension $V = 100$ volts

Question : Calculons la vitesse v de l'électron et la longueur d'onde λ associée

particule non relativiste $\Rightarrow$ $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = e.V$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2 e.V}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2.e.V}{m}}}$$

A.N : $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}{0{,}9 \cdot 10^{-30}}}$

$$\boxed{v = 5{,}96 \cdot 10^{6} \text{ m/s}}$$

Rq : La vitesse des e^- n'est pas negligeable devant c par conséquence les particules sont relativiste

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

Calcul de p : puisque le mvt est relativiste

$$\Rightarrow p = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e \cdot v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A.N : $\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{0{,}9 \cdot 10^{-30} \cdot 6 \times 10^{6}} \sqrt{1 - \frac{(6 \cdot 10^{6})^2}{(3 \cdot 10^{8})^2}}$

$= 1{,}22 \cdot 10^{-10} \sqrt{0{,}9996} = 1{,}22 \cdot 10^{-10}$ m

$\Rightarrow \lambda = 1{,}22$ Å et l'ordre de grandeur d'électron $d = 10^{-15}$

$\Rightarrow$ La longueur d'onde n'est pas negligeable devant d

d'ou le traitement M.Q.

23

Université My ISMAIL
F.S.T. d'Errachidia
Département de Physique

Parcours M.I.P. S4
Module P147

T.D. de Mécanique Quantique

Série n° 2

Exercice III: Vitesse de groupe - vitesse de phase - loi de dispertion des ondes de de Broglie

1/- Une onde plane électromagnétique de fréquence ν se propageant dans le vide e donnée par le champ électrique E(t,x) qui s'écrit dans les relations complexes :

$$E(t,x)= E_0 \exp i(kx-\omega t); \quad \text{avec : } k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \omega = 2\pi\nu \quad \text{et} \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

Déterminer l'onde plane lumineuse en termes de l'impulsion p et de l'énergie E du photon puis en fonction de p seul.

Calculer la vitesse de groupe V_p et la vitesse de phase V_φ de cette onde, conclusion.

Rappeler l'expression de l'intensité I de cette onde, l'interpréter en termes quantiques.

serie2 suite

2/- De même, l'onde plane monochromatique de De Broglie associée à une particule en mouvement peut être représentée par la fonction d'onde : $\psi(t,x)=A\exp i(kx-\omega t)$ où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est la norme du vecteur d'onde et $\omega = 2\pi\nu$ la pulsation de l'onde de matière.

Etablir une relation entre la fréquence ν et la longueur d'onde λ de cette onde de matière.

Déterminer l'onde plane de matière en fonction de l'impulsion p et de l'énergie E de la particule dans le cas général et en fonction de p seul dans la cas d'une particule libre.

Calculer, dans ce dernier cas la vitesse de groupe et celle de phase; conclusion.

Calculer l'intensité de cette onde et l'interpréter physiquement.

3/- Pour une particule relativiste, montrer que la vitesse de groupe V_g de l'onde de matière associée coincide avec la vitesse de la particule.

Montrer que la vitesse de phase V_φ de cette onde coincide avec la célérité de propagation de celle-ci et qu'elle n'a pas de réalité physique (on vérifiera l'égalité $V_g V_\varphi = C^2$)

Calculer V_g et V_φ en termes de la fréquence ν, ou d'une façon équivalente en fonction de l'énergie E. En déduire la loi de dispersion pour l'onde associée à cette particule (on calculera l'indice de réfraction relatif aux ondes de matière, défini par $n=C/V_\varphi$ en fonction de ν). Conclusion.

Serie 2 - Exercice 3 :

1) **Donneés** onde plane électromagnétique de fréquence ν de champs electrique : $E(t,x) = E_0 \exp(Kx - \omega t)$

$K = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\omega = 2\pi \nu$; $\nu = \frac{c}{\lambda}$

Questions

a) Exprimons $E(t,x)$ en fonction de p et E (énergie du γ)

b) " " " de p seulement,

c) Calcule de la vitesse V_g et V_φ et conclure

d) Calculer l'intensité I et interpreter physiquement

a) $E(t,x) = E_0 \exp i(Kx - \omega t)$

d'aprés les relations de Planck - Einstein :

$E = \hbar\omega$ $\quad$ $P = \hbar K$ (Dualité onde - corpuscule)

$\Rightarrow E(t,x) = E_0 \exp i\left(\frac{P}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)$

$$\boxed{E(t,x) = E_0 \exp \frac{i}{\hbar}(Px - Et)}$$

b) pour le photon $m = 0 \Rightarrow E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$\Rightarrow E = pc$

$\Rightarrow E(t,x) = E_0 \exp \frac{i}{\hbar}(Px - pct)$

$$\Rightarrow \boxed{E(x;t) = E_0 \exp \frac{ip}{\hbar}(x - ct)}$$

c) $v_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{dE}{dP} = c$

$v_\varphi = \frac{\omega}{K} = \frac{E}{P} = c$

ceci car $E = p.c$ (photon)

$\Rightarrow \boxed{v_g \cdot v_\varphi = c^2}$ la particule donc est Relativiste

d) $I = |E(t,x)|^2 = E^*(t,x)\, E(t,x)$

$= |E_0|^2$ (car $|e^{i\theta}| = 1$)

c'est la densité de probabilité de présence d'un photon avec une frequence entre ν et $\nu + d\nu$

2) onde de matière:

Donneés:

Onde monochromatique de De Broglie de fonction d'onde

$\psi(t,x) = A \exp i(Kx - \omega t)$

$K = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\omega = 2\pi\nu$

Questions:

a) Etablir la relation entre λ et ν

b) Determiner $\psi(t,x)$ en fct de p et E ensuite juste p

c) Calcule de V_g et V_φ et conclure

d) Calculer l'intensité de l'onde et Interpreter

a) On a $v_\varphi = \frac{\omega}{K} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda\nu \Rightarrow \boxed{\lambda\nu = V_\varphi}$

b) $\boxed{\psi(t,x) = A \exp \frac{i}{\hbar}(Px - Et)}$ (m chose que 1))

en terme de p seulement: puisque la particule est non relativiste (≠ photon)

$\Rightarrow E = E_c + E_p = E_c + 0$ car la particule est libre

$= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$

$\Rightarrow \boxed{\psi(t,x) = A \exp \frac{i}{\hbar}\left(p.x - \frac{p^2}{2m} t\right)}$

c) Calcule de v_g et v_φ :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{p}{m} = v$$

$\Rightarrow$ La vitesse du groupe correspond à la vitesse de la particule.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$: pas de signification physique.

d) Calcule de I

$$I = |\psi(t,x)|^2 = |A|^2$$

3) Donnée : particule relativiste

Questions : a) Montrons que $v_g = v$ (vitesse de la particule)

b) Montrer que $v_\varphi = \lambda \nu$ (la célérité de propag de l'onde)

c) calculons v_g et v_φ en fct de v

d) Deduisons la loi de dispersion pour l'onde et conclure

a) Particule relativiste $\Rightarrow \begin{cases} E = mc^2 = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 \\ p = mv \end{cases}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}$$

or $E = \sqrt{p^2c^2+m^2c^4} \Rightarrow \dfrac{dE}{dp} = \dfrac{\cancel{2}pc^2}{2\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}}$

$\Rightarrow v_g = \dfrac{pc^2}{E}$ or $\dfrac{E}{p} = \dfrac{c^2}{v} \Rightarrow \dfrac{p}{E} = \dfrac{v}{c^2}$

$\Rightarrow v_g = \dfrac{v}{\cancel{c^2}}\cdot\cancel{c^2} = v$ d'où $\boxed{v_g = v}$

Serie 2) Ex3 Q3) suite

b) $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda\nu$: c'est la célérité de propagation de l'onde

$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{v_g}$

$\Rightarrow \boxed{v_\varphi \cdot v_g = c^2}$

or $v_g = v < c \Rightarrow v_\varphi > c$?! pas de signification physique.

c) on a $E = h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_g^2}{c^2}}}$

$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{v_g^2}{c^2}} \cdot E = m_0 c^2$

$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{v_g^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{E} = \frac{m_0 c^2}{h\nu}$

$\Rightarrow 1-\frac{v_g^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^4}{(h\nu)^2} \Rightarrow \frac{v_g^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{(h\nu)^2}$

$\Rightarrow v_g^2 = c^2\left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{(h\nu)^2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{v_g = c\sqrt{1-\frac{m_0^2 c^4}{h^2\nu^2}}} < c$

$v_g \times v_\varphi = c^2 \Rightarrow v_\varphi = \frac{c^2}{v_g} = \frac{c^2}{c\sqrt{1-\frac{m_0^2 c^4}{h^2\nu^2}}}$

$\Rightarrow \boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{m_0^2 c^4}{h^2\nu^2}}}} > c$

d) La loi de dispersion est une relation entre ω et $\vec{k}$ donnée par la vitesse de phase; $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$

$v_\varphi > c \Rightarrow \frac{c}{n} > c \Rightarrow n < 1$

ici n represente l'indice de refraction relatif au onde de matière

$n < 1$: comme pour la lumière.

Fin Serie 2

27