Université My ISMAIL
F.S.T. d'Errachidia
Département de Physique

Parcours M.I.P. S4
Module P147

T.D. de Mécanique Quantique

Série n° 3

I- Transformation de Fourier

On rappelle qu'en terme d'impulsion, la transformée de Fourier de la fonction d'onde $\psi(x)$ au point p sera définie par:

$$\overline{\psi}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx$$

On peut déduire $\psi(x)$ à partir de $\overline{\psi}(p)$ à l'aide de la transformation inverse de Fourier:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi}(p) e^{+ipx/\hbar} dp$$

Exercices:

1/- Calculer les transformées de Fourier $g(k) = F[\psi(x)](k)$ et $\overline{\psi}(p)$ des fonctions suivantes:

a- $\psi(x) = \begin{cases} 1/a & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & |x| \rangle a/2 \end{cases}$

b- $\psi(x) = e^{\frac{-|x|}{a}}$, $a > 0$

c- $\psi(x) = e^{\frac{-x^2}{a^2}}$

On admettra que l'on a: $\displaystyle\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} e^{-\beta z^2} dz = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2}$ $\quad \forall \alpha \in \Re$

2/- Evaluer les relations de récurrence suivantes:

$$F[\psi^{(n)}(x)](k) = (ik)^n F[\psi(x)](k)$$

et

$$\overline{\psi^{(n)}}(p) = \left(i\frac{p}{\hbar}\right)^n \overline{\psi}(p)$$

où $\psi^{(n)}(x)$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\psi(x)$ dont les limites sont supposées nulles lorsque x tend vers $\pm\infty$.

3/- On appellera produit de convolution de deux fonctions $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$, l'intégrale (si elle existe) :

$$(\psi_1 * \psi_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(y)\psi_2(x-y) dy$$

serie 3 suite

Montrer que l'on a bien : $F[(\psi_1 * \psi_2)(x)](k) = (2\pi)^{1/2} F[\psi_1(x)](k) \times F[\psi_2(x)](k)$, et

$$\overline{(\psi_1 * \psi_2)}(p) = (2\pi\hbar)^{1/2}\, \overline{\psi_1}(p)\overline{\psi_2}(p)$$

4/- Démontrer l'égalité : $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(x)\psi_2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_1}^*(p)\overline{\psi_2}(p)dp$, en déduire l'identité de Parseval-Plancherel : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{\psi}(p)|^2 dp$.

II- Fonction delta de Dirac

On introduit la fonction $\delta^{(\varepsilon)}(x - x_o)$ qui ne prend de valeur appréciable que dans un intevalle de longueur ε autour de x_o, et telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x - x_o)dx = 1$ (5)

on appellera fonction δ de Dirac centrée au point x_o, la limite d'une telle fonction $\delta^{(\varepsilon)}(x - x_o)$ lorsque ε tend vers zéro: $\delta(x - x_o) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\delta^{(\varepsilon)}(x - x_o)\right]$

Exercices:

1/- Montrer que les fonctions suivantes satisfont la condition (5):

a- $\delta^{(\varepsilon)}(x - x_o) = \begin{cases} 1/\varepsilon & -\varepsilon/2 \le x - x_o \le \varepsilon/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

b- $\delta^{(\varepsilon)}(x - x_o) = \dfrac{1}{2\varepsilon} \exp\left(-\dfrac{|x - x_o|}{\varepsilon}\right)$

c- $\delta^{(\varepsilon)}(x - x_o) = \dfrac{1}{\varepsilon\pi^{1/2}} \exp\left[-\dfrac{(x - x_o)^2}{\varepsilon^2}\right]$

d- $\delta^{(\varepsilon)}(x - x_o) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\varepsilon}{(x - x_o)^2 + \varepsilon^2}$

2/- Démontrer la propriété fondamentale de la fonction de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_o)f(x)dx = f(x_o)$$

Pour cela on remarquera que dans l'intervalle effectif d'intégration $\left[x_o - \frac{\varepsilon}{2}, x_o + \frac{\varepsilon}{2}\right]$, l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x - x_o)f(x)dx \cong f(x_o)$$

3/- Calculer les transformées de Fourier $F[\delta(x - x_o)](k)$ et $\overline{\delta}(p)$ de $\delta(x - x_o)$. En déduire que $\delta(x - x_o)$ s'écrit explicitement :

$$\delta(x - x_o) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ik(x-x_o)}dk = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ip(x-x_o)/\hbar}dp \qquad (6)$$

4/- Montrer que $\delta(cx) = \dfrac{1}{|c|}\delta(x)$, en déduire que $\delta(x)$ est paire.

5/- En utilisant l'équation (6), montrer que l'intégrale $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi}(p)e^{+ipx/\hbar}dp$ est bien égale à $\psi(x)$; redémontrer alors l'identité de Parseval-Plancherel.

Serie 3

TF $\quad \overline{\varphi}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ipx/\hbar}\, dx$

T.F.I $\quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p)\, e^{ipx/\hbar}\, dp$

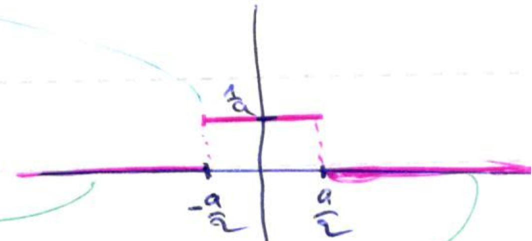
1) On calcule les TF $g(k) = F(\varphi(x))(k)$ et $\overline{\varphi}(p)$

a) Donnée

$$g(k) = F(\varphi(x))(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

or $\varphi(x) = \begin{cases} 1/a & \text{si } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > a/2 \end{cases}$

$a \neq 0$



$$\Rightarrow g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{a}{2}} \varphi(x)\, e^{-ikx}\, dx}_{0} + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi(x)\, e^{-ikx}\, dx + \underbrace{\int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ikx}\, dx}_{0} \Big]$$

relation de Chasles

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a}\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-ik} \left(e^{-i\frac{a}{2}x} - e^{i\frac{a}{2}x} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\, ak} \frac{e^{i\frac{a}{2}x} - e^{-i\frac{a}{2}x}}{2i} = \boxed{\frac{2}{ak\sqrt{2\pi}} \sin \frac{a}{2} x}$$

Serie 3 _ EX1 _ Q1 _ a) suite

$$\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, e^{-i\frac{px}{\hbar}}\, dx$$

Si on pose $k = \frac{p}{\hbar} \Rightarrow \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, e^{-ikx}\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, e^{-ikx}\, dx}_{g(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\, g(k)} \quad *$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{2}{ak\sqrt{2\pi}} \sin\left(\frac{a}{2} k\right)$$

$$\boxed{\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{p}{\hbar}\right)}{\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{p}{\hbar}\right)}}$$

b) ici $\psi(x) = e^{-\frac{|x|}{a}}$; $a > 0$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{a}}\, e^{-ikx}\, dx$$

or $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Relation de Chasles

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{|x|}{a}}\, e^{-ikx}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{a}}\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{a}}\, e^{-ikx}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{a}}\, e^{-ikx}\, dx$$

Serie 3 _ Ex 1 _ Q 1 - b) suite

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{(\frac{1}{a} - ik)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{a} + ik)x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(\frac{1}{a} - ik)x}}{\frac{1}{a} - ik} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(\frac{1}{a} + ik)x}}{-(\frac{1}{a} + ik)} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\frac{1}{a} - ik} - 0 \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 - \frac{1}{-(\frac{1}{a} + ik)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\frac{1}{a} - ik} + \frac{1}{\frac{1}{a} + ik} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\frac{1}{a} + \cancel{ik} + \frac{1}{a} - \cancel{ik}}{(\frac{1}{a} - ik)(\frac{1}{a} + ik)}$$

$$\boxed{g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2/a}{(\frac{1}{a})^2 + k^2}}$$

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} g(k) \quad \text{(ceci d'après } \circledast)$$

$$\boxed{\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{a/2}{(\frac{1}{a})^2 + k^2}}$$

c) donnée $\varphi(x) = e^{-x^2/a^2}$; $a \neq 0$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/a^2} . e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x^2}{a^2} + ikx)} dx$$

$$\text{or} \quad \frac{x^2}{a^2} + ikx = \overbrace{\frac{x^2}{a^2} + 2\,\frac{x}{a} \cdot \frac{a}{2} ik + \left(\frac{aik}{2}\right)^2}^{\text{Identité remarquable}} - \left(\frac{aik}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x}{a} + \frac{aki}{2}\right)^2 + \frac{a^2k^2}{4} \quad (i^2 = -1)$$

Serie 3) EX 1) Q 1) c) Suite

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{a}+\frac{aki}{2}\right)^2} \cdot e^{-\frac{k^2a^2}{4}} \, dx$$

On pose $X = \frac{x}{a} + \frac{aki}{2} \Rightarrow x = a\left(X - \frac{aki}{2}\right)$

$\Rightarrow dx = a\,dX$ et si $x \to -\infty$ alors $X \to -\infty$

si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$

$$\Rightarrow \quad g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2} \cdot e^{-\frac{k^2a^2}{4}} \cdot a\,dX$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2a^2}{4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2} dX}_{\text{Integrale de Gauss}}$$

En générale: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

dans notre cas $\alpha = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2} dX = \sqrt{\pi}$

d'où $g(k) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2a^2}{4}} \cdot \sqrt{\pi}$

$$\boxed{g(k) = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2a^2}{4}}}$$

d'après ⊛ $\quad \bar{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \cdot g(k) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2a^2}{4}}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\Psi}(p) = \frac{a}{\sqrt{2\hbar}} e^{-\frac{k^2a^2}{4}}}$$

Serie 3 – Ex1 – Q2 ;

2) * Montrons par recurrence que $F(\psi^{(n)}(x))(k) = (ik)^n F(\psi(x))(k)$

- pour $n=0$:

$$F(\psi^{(0)}(x))(k) = F(\psi(x))(k) = (ik)^0 F(\psi(x))(k)$$

$$\Rightarrow \quad F(\psi(x))(k) = F(\psi(x))(k)$$

la relation est vraie pour $n=0$

- On suppose $F(\psi^{(n)}(x))(k) = (ik)^n F(\psi(x))(k)$

et on montre que $F(\psi^{(n+1)}(x))(k) = (ik)^{n+1} F(\psi(x))(k)$

En effet :

$$F(\psi^{(n+1)}(x))(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^{(n+1)}(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

integration par partie :

$$\begin{cases} u = e^{-ikx} \\ v' = \psi^{(n+1)}(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -ik\, e^{-ikx} \\ v = \psi^{(n)}(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(\psi^{(n+1)}(x))(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\psi^{(n)}(x)\, e^{-ikx} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -ik\, \psi^{(n)}(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (0 - 0) + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^{(n)}(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= ik \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^{(n)}(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= ik \; (ik)^n F(\psi(x))(k)$$

$$\boxed{F(\psi^{(n+1)}(x))(k) = (ik)^{n+1} F(\psi(x))(k)}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad F(\psi^{(n)}(x))(k) = (ik)^n F(\psi(x))(k)$

Serie 3 _ Ex 1 _ Q 2) suite

On a $\overline{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} g(k)$

d'aprés la formule précédente

$$\overline{\varphi^{(n)}}(p) = (ik)^n \, \overline{\varphi}(p)$$

$$\rightarrow \boxed{\overline{\varphi^{(n)}}(p) = \left(i \frac{p}{\hbar}\right)^n \overline{\varphi}(p)}$$

3) Produit de convolution de deux fcts

Soient f et g deux fonctions alors on note $f * g$ le produit de convolution de f et g. il est défini par:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

Propriétés

bilinéaire : $f*(g+\lambda h) = f*g + \lambda f*h$

Associatif : $f*(g*h) = (f*g)*h$

Commutatif : $f*g = g*f$

Montrons que $F((\varphi_1 * \varphi_2)(x))(k) = \sqrt{2\pi}\, F(\varphi_1(x))(k) \times F(\varphi_2(x))(k)$

$$F((\varphi_1 * \varphi_2)(x))(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_1 * \varphi_2)(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(y)\, \varphi_2(x-y)\, dy\, e^{-ikx}\, dx$$

Serie 3) Ex 1) Q3) Suite

$$F(\varphi_1 * \varphi_2)(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(y) \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x-y)\, e^{-ikx} dx \right)}^{(*)} dy$$

On pose $X = x - y \Rightarrow dX = dx$ (y est variable muette dans (*))

$X \to \pm\infty \Leftrightarrow x \to \pm\infty$

$$\Rightarrow F(\varphi_1 * \varphi_2)(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(X)\, e^{-iK(X+y)} dX \right) dy$$

$$\Rightarrow F(\varphi_1 * \varphi_2)(x)(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(X)\, e^{-ikX} dX\, e^{-iky} dy$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(y)\, e^{-iky} dy\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(X)\, e^{-ikX} dX$$

$$= \sqrt{2\pi}\, F(\varphi_1(y))(K) \times F(\varphi_2(X))(K)$$

d'où $\boxed{F\left[(\varphi_1 * \varphi_2)(x)\right](K) = \sqrt{2\pi}\, F(\varphi_1(x))(K) \times F(\varphi_2(x))(K)}$

d'après (*)

$$\cancel{\sqrt{\hbar}}\, \overline{\varphi_1 * \varphi_2}(p) = \sqrt{2\pi}\, \cancel{\sqrt{\hbar}}\, \bar{\varphi}_1(p) \times \sqrt{\hbar}\, \bar{\varphi}_2(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\varphi_1 * \varphi_2}(p) = \sqrt{2\pi\hbar}\, \bar{\varphi}_1(p) \times \bar{\varphi}_2(p)}$$

4) Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x)\, \varphi_2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1^*(p)\, \bar{\varphi}_2(p)\, dp$:

d'apres la transf de Fourier

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-i\frac{px}{\hbar}} dx \Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(p)\, e^{i\frac{px}{\hbar}} dp$$

avec $K = \frac{p}{\hbar}$

Serie 3 _ Ex 1) Q 4) Suite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x)\varphi_2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \overline{\varphi}_2(p)\, e^{i\frac{px}{\hbar}}\, dp\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}_2(p)\, dp \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x)\, e^{ikx}\, dx}_{\overline{\varphi}_1^*(p)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}_2(p) \cdot \overline{\varphi}_1^*(p)\, dp$$

d'où $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x)\,\varphi_2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}_1^*(p)\, \overline{\varphi_2(p)}\, dp}$

Posons $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}^*(p)\,\overline{\varphi}(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{\varphi}(p)|^2\,dp}$$

C'est l'identité de Parseval - Plancherel

—

Serie 3 :

Exercice 2

1) La condition (5) : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\,dx = 1}$ (5)

a) Montrons que la fonction $\delta^{(\varepsilon)}(x-x_0) = \begin{cases} 1/\varepsilon & -\frac{\varepsilon}{2} < x - x_0 < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ vérifie la condition (5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{\varepsilon}{2}} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\,dx}_{0} + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\,dx$$

$$+ \underbrace{\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\,dx}_{0}$$

$$= \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon}\,dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} 1\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\left[x\right]_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\cancel{2}\cancel{\varepsilon}}{\cancel{2}\cancel{\varepsilon}} = \boxed{1}$$

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\varepsilon} \exp\left(-\frac{|x-x_0|}{\varepsilon}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\left[\int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\frac{|x-x_0|}{\varepsilon}\right) + \int_{x_0}^{+\infty} \exp -\frac{|x-x_0|}{\varepsilon}\,dx\right]$$

$|x-x_0| = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0}^{+\infty} \exp\frac{-(x-x_0)}{\varepsilon}\,dx$$

$\Leftrightarrow$ $x \geq x_0$ et $x \leq x_0$

9

Serie 3) Ex 2) 1) b) suite

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{\exp\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)}{\frac{1}{\varepsilon}}\right]_{-\infty}^{x_0} + \frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{\exp -\frac{(x-x_0)}{\varepsilon}}{-1/\varepsilon}\right]_{x_0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\Big(\varepsilon \exp(0) - \varepsilon\exp(-\infty)\Big) + \frac{1}{2\varepsilon}\Big(-\varepsilon \exp(-\infty) + \varepsilon \exp(0)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\cancel{\varepsilon}}(\cancel{\varepsilon}) + \frac{1}{2\cancel{\varepsilon}}(\cancel{\varepsilon}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

c) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon^2}\right) dx$$

On pose $X = x - x_0 \iff x = X + x_0$

$\Rightarrow dx = dX$

Si $x = +\infty$ alors $X = +\infty$ et même pour $-\infty$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{X^2}{\varepsilon^2}\right) dX$$

d'aprés ex 1) l'integrale de Gauss

$$\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} e^{-\beta z^2}\,dz = \sqrt{\pi/\beta}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\,dx = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{1/\varepsilon^2}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\varepsilon}\cancel{\sqrt{\pi}}}\cancel{\sqrt{\pi}}\,.\,\cancel{\varepsilon} = \boxed{1}$$

Serie3) Ex2 Q1) d)

d) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x-x_0)^2+\varepsilon^2}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\cancel{\varepsilon}}{\varepsilon^{\cancel{2}}\left(\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)^2+1\right)}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{1}{\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)^2+1}\,dx$$

On pose $X = \frac{x-x_0}{\varepsilon} \Leftrightarrow x = \varepsilon X + x_0$

$dx = \varepsilon\, dX$

Si $x = \pm\infty$ alors $X = \pm\infty$ car $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\,dx = \frac{1}{\pi\cancel{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{X^2+1}\,\cancel{\varepsilon}\,dX$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{X^2+1}\,dX$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\text{Arctan}(X) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{1}$$

Serie 3) Ex 2) Q 2

2) $\underline{\text{Mq}}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\, f(x)\, dx = f(x_0)$?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\, f(x)\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x-x_0)\, f(x)\, dx}_{f(x_0)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\, f(x) = f(x_0)}$$

3) Calculons la transf de Fourier de $\delta(x-x_0)$:

$$F(\delta(x-x_0))(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\, \underbrace{e^{-ikx}}_{f(x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\, f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x_0)$$

$$\boxed{F(\delta(x-x_0))(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx_0}}$$

$$\overline{\delta}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\, F(\delta(x-x_0))(k) \quad \text{(d'après Ex 1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx_0} \quad \text{avec } k = \frac{p}{\hbar}$$

$$\boxed{\overline{\delta}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-i\frac{px_0}{\hbar}}}$$

Série 3) Ex 2 Q3) suite

Deduction :

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\delta(x-x_0))(K)\, e^{iKx}\, dK \quad (\text{T.F.I})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-iKx_0}\, e^{iKx}\, dK$$

$$\boxed{\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iK(x-x_0)}\, dK}$$

or $K = \frac{p}{\hbar} \Rightarrow p = K\hbar \Rightarrow dK = \frac{dp}{\hbar}$

$$\Rightarrow \delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{p}{\hbar}(x-x_0)}\, \frac{dp}{\hbar}$$

$$\boxed{\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(x-x_0)/\hbar}\, dp}$$

4) Montrons que $\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x)$

$$\delta(cx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iKcx}\, dK \quad \text{(ceci d'après 3)}$$

On pose $K' = cK \Rightarrow dK' = |c|\, dK \Rightarrow dK = \frac{1}{|c|}\, dK'$

$$\delta(cx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iK'x}\, \frac{1}{|c|}\, dK'$$

$$= \frac{1}{2\pi|c|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iK'x}\, dK'$$

$$= \frac{1}{|c|}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iK'x}\, dK'$$

(~~y est remplacé par x car c'est une variable muette~~)

$$\boxed{\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\, \delta(x)}$$

Serie3) Ex2) Q4) Suite

Si $c=-1$ alors $\delta(-x) = \frac{1}{|-1|}\delta(x)$

$\Rightarrow \delta(-x) = \delta(x)$

d'où la distribution δ est paire.

5) Mq $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}(p)\, e^{ipx/\hbar}\, dp$?

par définition : $\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)\, e^{-ipy/\hbar}\, dy$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}(p)\, e^{ipx/\hbar}\, dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)\, e^{-ipy/\hbar}\, dy\, e^{ipx/\hbar}\, dp$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)\, e^{ip(x-y)}\, dy\, dp$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)\, dy \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\hbar}e^{ip(x-y)}\, dp}_{=\delta(x-y)\ (\text{d'après } (6))}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)\, \delta(x-y)\, dy$$

$$= \psi(x) \Rightarrow \boxed{\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}(p)\, e^{ipx/\hbar}\, dp}$$

Identité de Parseval-Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\,\psi(x)\, dx$$

or $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}(p)\, e^{ipx/\hbar}\, dp$

$\psi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}^*(p')\, e^{-ip'x/\hbar}\, dp'$

Serie 3) Ex 2) (Q 5) Suite

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(p)\, e^{ipx/\hbar}\, \bar{\psi}^*(p')\, e^{-ip'x/\hbar}\, dp\, dp'\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(p)\,\bar{\psi}^*(p') \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\hbar}\, e^{ix(p-p')/\hbar}\, dx}_{\delta(p-p')}\, dp\, dp'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(p)\,\bar{\psi}^*(p')\,\delta(p-p')\, dp\, dp'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}^*(p')\, dp' \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(p)\,\delta(p-p')\, dp}_{\bar{\psi}(p')}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}^*(p')\,\bar{\psi}(p')\, dp'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}^*(p)\,\bar{\psi}(p)\, dp \quad \begin{pmatrix} p' \text{ variable} \\ \text{muette} \\ p' \leftarrow p \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{\psi}(p)|^2 dp}$$

c'est l'identité de Parseval - Plancherel

Fin Serie 3