Université My ISMAIL
F.S.T. d'Errachidia
Département de Physique

Parcours M.I.P. S4
Module P147

T.D. de Mécanique Quantique

Série n°5

Exercice n° 1 :

L'espace des états d'un système physique est à trois dimensions et est rapporté à la base orthonormée complète $\left(|U_j\rangle\right)$; j=1,2,3. L'opérateur hamiltonien H et l'observable A sont représentés par les matrices:

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exprimées dans la base $\left(|U_j\rangle\right)$, ω et a étant deux constantes réelles positives. A l'instant t_0=0, l'état du système est décrit par le vecteur:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{2}|U_2\rangle + \frac{1}{2}|U_3\rangle$$

1/- A l'instant t_0=0, on mesure l'énergie du système.

- Quelles valeurs peut-on trouver ?
- Et avec quelles probabilités ?
- Calculer la valeur moyenne dans l'état $|\psi(0)\rangle$ de l'énergie.
- Calculer la valeur quadratique moyenne de l'énergie à l'insatnt t_0=0, défine par $(\Delta H)_0 = \left(\langle H^2\rangle_0 - \langle H\rangle_0^2\right)^{1/2}$.

2/- Au lieu de mesurer l'énergie à l'insatnt t_0=0, on mesure la grandeur physique représentée par l'observable A.

- Quelles résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
- Quel est éventuellement l'état du système immédiatement après la mesure ?

3/- Les observables H et A représentent-elles des grandeurs physiques compatibles ? Forment-elles un E.C.O.C. ? Que peut-on en déduire ?

4/- Aucune mesure n'étant effectuée dans l'intervalle de temps [0,t], quel est l'état du système à l'instant t ?

5/- Quels résultats peut-on obtenir si l'on mesure à l'instant t l'énergie du système ou la grandeur physique représentée par A et avec quelles probabilités ?

Exercice 2 :

Une particule de masse m se trouve confinée dans un puits de potentiel infini de largeur a. Soient $|\varphi_k\rangle$ les états propres normés de l'Hamiltonien H de cette particule conservative et E_k les énergies propres correspondantes.

On donne $\varphi_k(x) = \langle x|\varphi_k\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$ et $E_k = \frac{k^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$, $k \in Z^*$.

1/- Les niveaux d'énergie E_k ne sont pas dégénérés, pourquoi ?

2/- L'état de la particule à l'instant t=0 est donné par le vecteur normé :

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{k=1}^{4} C_k|\varphi_k\rangle, \quad C_k \in C^*$$

a/- Quelles valeurs peut-on trouver lors d'une mesure de l'énergie de cette particule à l'instant t=0 ?

b/- Avec quelles probabilités trouve-t-on ces valeurs ?

c/- Quelle est la probabilité de trouver une valeur inférieure ou égale à $\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$? En déduire la probabilité de trouver une valeur supérieure ou égale à $\frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ en fonction de C_1 et C_2 puis en fonction de C_3 et C_4.

3/- Calculer la valeur moyenne $\langle H\rangle_o$ de l'énergie de cette particule dans l'état $|\psi(0)\rangle$.

4/- La mesure de l'énergie n'étant pas effectuée, évaluer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ de la particule à un instant t quelconque. Cet état est-il normé ? Conclusion.

5/- on mesure l'énergie de la particule à cet instant, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Que deviennent les probabilités calculées en 2°c et la valeur moyenne calculée en 3° ? Conclusion.

6/- Lors d'une mesure de l'énergie, on trouve $\frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2}$, quel est l'état de la particule immédiatement après la mesure ? Que trouve-t-on si l'on mesure à nouveau l'énergie ? avec quelle probabilité ?

Solution de la Serie 5

Exercice 1

Données

- Base orthonormée complet : $\{|u_i\rangle\}_{i=1,2,3}$
- l'Hamiltonien H : $H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- l'observable A : $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

  } dans la base $\{|u_i\rangle\}_{i=1,2,3}$
- $\omega, a \in \mathbb{R}^+$
- A $t_0 = 0$: $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$

1) A $t_0 = 0$ On mesure l'énergie du système :

a) Quelles valeurs peut-on-trouver ?

Postulat 3 : Lorsque on mesure une grandeur physique, On trouve les valeurs propres de l'observable correspondant

Dans notre Cas, On s'interesse à l'energie cependant l'observable associé est l'Hamiltonien H

$\Rightarrow$ Res (mes H) = {valeurs propres de H}

equation caracteristique $\det(H - \lambda_i \mathbb{1}) = 0$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$k_1 = \hbar\omega$, $k_2 = 2\hbar\omega$, $k_3 = 2\hbar\omega$

$k_1 = \hbar\omega$ valeur propre simple (non dégénérée) associée à $|U_1\rangle$

$k_2 = k_3 = 2\hbar\omega$ valeur propre dégénérée 2 fois associée a $|U_2\rangle$ et $|U_3\rangle$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Res (mes } H) = \{\hbar\omega ; 2\hbar\omega\}}$

Autrement dit : Si H est diagonale alors les valeurs propres de H sont les éléments de la diagonales.

b) Les probabilités associées :

Postulat (4) $\Rightarrow$ $$Pr(\hbar\omega) = \sum_{k=1}^{g_n} \frac{|\langle u_k | \psi(0)\rangle|^2}{\langle \psi(0) | \psi(0)\rangle}$$

puisque $\hbar\omega$ est non dégénérée alors $g_n = 1$

$$\Rightarrow \quad Pr(\hbar\omega) = \frac{|\langle U_1 | \psi(0)\rangle|^2}{\langle \psi(0) | \psi(0)\rangle} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$Pr(2\hbar\omega) = \sum_{k=1}^{g_n} \frac{|\langle U_k | \psi(0)\rangle|^2}{\langle \psi(0) | \psi(0)\rangle}$$

ona $2\hbar\omega$ est dégénérée 2 fois $\Rightarrow$

$$Pr(2\hbar\omega) = \frac{|\langle U_2 | \psi(0)\rangle|^2 + |\langle U_3 | \psi(0)\rangle|^2}{\langle \psi(0) | \psi(0)\rangle}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2

Verification $\sum Pr(a_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

c) La valeur Moyenne de H à $t=0$:
Par Définition la valeur moyenne dans l'état $|\psi\rangle$ de l'opérateur A est :

$$\langle A \rangle = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \sum_k a_k \, Pr(a_k)$$

dans notre cas :

$$\langle H \rangle_{t=0} = \frac{\langle \psi(0) | H | \psi(0) \rangle}{\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle}$$

$$= \hbar\omega \times \frac{1}{2} + 2\hbar\omega \times \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\langle H \rangle_0 = \frac{3}{2} \hbar\omega}$$

Autrement dit : $\langle H \rangle_0 = \frac{\hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}{1}$

$$= \hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; 1 ; 1\right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\boxed{\langle H \rangle_0 = 3/2 \, \hbar\omega}$$

d) Calcul de la valeur quadratique

$$\boxed{(\Delta H)_0 = \sqrt{\langle H^2\rangle_0 - \langle H\rangle_0^2}}$$

On a $H^2 = \hbar^2\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \hbar^2\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\text{Res}(\text{mes } H^2) = \{\hbar^2\omega^2 ; 4\hbar^2\omega^2\}$

or $Pr(\hbar^2\omega^2) = |\langle u_1 | \psi(0)\rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$Pr(4\hbar^2\omega^2) = |\langle u_2 | \psi(0)\rangle|^2 + |\langle u_3 | \psi(0)\rangle|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

d'où $\langle H^2\rangle_0 = \frac{1}{2}\hbar^2\omega^2 + \frac{1}{2} 4\hbar^2\omega^2 = \frac{5}{2}\hbar^2\omega^2$

$\Rightarrow (\Delta H)_0 = \sqrt{\frac{5}{2}\hbar^2\omega^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\hbar^2\omega^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{4} - \frac{9}{4}\right)\hbar^2\omega^2}$

$$\boxed{(\Delta H)_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega}$$

2) A $t=0$ on mesure maintenant la grandeur physique représentée par l'observable A

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Les résultats obtenus et leurs probabilités

On sait que $\text{Res}(\text{mes}(A)) = \{\text{val propre de } A\}$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & a \\ 0 & a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (a-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} + 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow (a-\lambda)(\lambda^2 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = a \quad \text{ou} \quad \lambda^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = a \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = a \quad \text{ou} \quad \lambda_3 = -a$$

d'où on a une valeur nondégénéré $-a$ et une valeur dégénéré 2 fois a.

$$\Rightarrow \quad \text{Res}(\text{mes}(A)) = \{-a ; a\}$$

Pour avoir les probabilités associés, il faut déterminer les kets propres associés à λ_1, λ_2 et λ_3

$$\rightarrow A|u_1\rangle = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a|u_1\rangle$$

$\Rightarrow$ $|u_1\rangle$ est un ket propre associé à la valeur propre a.

de m̂ on peut montrer que $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$ ne sont pas des kets propre de A, mais c'est une combinaison linéaire de $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$.

$\underline{\underline{\lambda_2 = a}}$: Considerons l'operateur $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

et le ket normalisé $|\varphi_1\rangle = \alpha |u_2\rangle + \beta |u_3\rangle$

tq $\begin{cases} \tilde{A} |\varphi_1\rangle = a |\varphi_1\rangle \\ \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = 1 \end{cases}$ $(a = \lambda_2)$

- $\langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$

- $\tilde{A} |\varphi_1\rangle = a |\varphi_1\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a\beta \\ a\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha \\ a\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta$

$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha^2 = 1 \Rightarrow 2\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle}$

$\underline{\underline{\lambda_3 = -a}}$: soit $|\varphi_2\rangle = \alpha' |u_2\rangle + \beta' |u_3\rangle$

$\Rightarrow \tilde{A} |\varphi_2\rangle = -a |\varphi_2\rangle$ et $\langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle = 1$

- $\langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle = 1 \Rightarrow \alpha'^2 + \beta'^2 = 1$

- $\tilde{A} |\varphi_2\rangle = -a |\varphi_2\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} a\beta' \\ a\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\alpha' \\ -a\beta' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha' = -\beta'$

$\Rightarrow \alpha'^2 + \alpha'^2 = 1 \Rightarrow \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\beta' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle}$

Calcule de Probabilité

la val propre a est associée au kets $|u_1\rangle$ et $|\varphi_1\rangle$

$\Rightarrow$

$$Pr(a) = \frac{|\langle u_1|\psi(0)\rangle|^2 + |\langle \varphi_1|\psi(0)\rangle|^2}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left|\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1$$

$Pr(a)$ est une probabilité certaine

$\Rightarrow$ $Pr(-a) = 0$: probabilité impossible

Autrement:

$$Pr(-a) = \frac{|\langle \varphi_2|\psi(0)\rangle|^2}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle} = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\right|^2}{1} = 0$$

b) l'état du système juste après la mesure?

Postulat 5:

Si dans l'état $|\psi\rangle$: Res (mes B) = b_n avec les ket propres $|u_n\rangle$ associés à la v.p b_n de l'observable B alors juste après la mesure le système est dans l'état $|u_n\rangle$

càd Sys $|\psi\rangle$ $\rightarrow$ obser B $\xrightarrow{mes}$ $\{b_n\}$ = Res(mes B) $\xrightarrow[\text{associés}]{ket}$ $|u_n\rangle$

↓ juste après la mesure

le système est dans l'état $|u_n\rangle$

On sait que $Pr(-a) = 0$ et $Pr(a) = 1$
d'où on a $Res(mes(A)) = \{a\}$
a est une valeur propre dégénérée deux fois:

$$A|u_1\rangle = a|u_1\rangle$$

$$\text{et } A|\varphi_1\rangle = a|\varphi_1\rangle$$

d'où prés la mesure on aura le système dans un état combiné de $|u_1\rangle$ et $|\varphi_1\rangle$ qui doit être normé :

$$|\psi_1\rangle = \alpha|u_1\rangle + \beta|\varphi_1\rangle$$

normé $\Rightarrow$ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$
On choisie $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

$$= |\psi(0)\rangle$$

Conclusion : l'état du système n'est pas perturbé aprés la mesure de A.

3) a) Def 1 $\boxed{\text{deux grandeurs physique A et B sont compatibles si } [A, B] = 0}$

Dans notre Cas :

$$[H; A] = HA - AH = \hbar \omega a \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \cdots \right]$$

$$= \hbar \omega a \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= 0$$

d'où H et A sont compatibles

b) Def 2 On dit que $\{A, B\}$ forme un ECOC si
- $[A, B] = 0$
- il existe une seule base orthonormée de E formée par les k.p communs entre A et B

dans notre Cas :

* $[H, A] = 0$ ✓
* Pour H : $|U_1\rangle$ et le ket propre associé à $\hbar\omega$

  $|U_2\rangle$; $|U_3\rangle$ deux ket propres associés à $2\hbar\omega$

  Pour A : $|\varphi_2\rangle$ est le ket p associé à la v.p : $-a$

  $|U_1\rangle$ et $|\varphi_1\rangle$ deux k.p associés à : a

$\Rightarrow$ $|U_1\rangle$ est un ket propre commun entre A et H

or $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ sont deux combinaisons linéaires de $|U_2\rangle$ et $|U_3\rangle$, montrons que $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$

sont aussi des Ket propres de H :

* $H|\varphi_1\rangle = H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|U_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|U_3\rangle\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} H|U_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} H|U_3\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} 2\hbar\omega |U_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} 2\hbar\omega |U_3\rangle$$
$$= 2\hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|U_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|U_3\rangle\right)$$
$$= 2\hbar\omega |\varphi_1\rangle$$

d'où $|\varphi_1\rangle$ est un K.p de H associé à la v.p $2\hbar\omega$

* $H|\varphi_2\rangle = H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|U_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|U_3\rangle\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} 2\hbar\omega|U_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} 2\hbar\omega |U_3\rangle$$
$$= 2\hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|U_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|U_3\rangle\right)$$
$$= 2\hbar\omega |\varphi_2\rangle$$

d'où $|\varphi_2\rangle$ est aussi K.p de H associé à la v.p $2\hbar\omega$

Conclusion $\{|U_1\rangle; |\varphi_1\rangle; |\varphi_2\rangle\}$ est une base orthonormée de E constituée de Kets propre commun entre H et A.

d'où $\{H, A\}$ est un E.C.O.C

4) À $t=0$ $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{2}|U_2\rangle + \frac{1}{2}|U_3\rangle$

l'état du système à un instant t quelque $|\psi(t)\rangle$?

d'aprés le postulat 5 $|\psi(t)\rangle$ verifie l'equation de schrödinger $\boxed{i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle}$ (*)

or H ne depend pas du temps donc le système est conservatif.

Ecrivons $|\psi(t)\rangle$ dans la base discrète $\{|U_i\rangle\}$

$$|\psi(t)\rangle = C_1(t)|U_1\rangle + C_2(t)|U_2\rangle + C_3(t)|U_3\rangle = \sum_{i=1}^{3} C_i(t)|U_i\rangle$$

remplaçons $|\psi(t)\rangle$ dans (*) :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \sum_{i=j}^{3} C_j(t)|U_j\rangle = H \sum_{j=1}^{3} C_j(t)|U_j\rangle$$

$$\sum_{j=1}^{3} i\hbar \frac{d}{dt} C_j(t)|U_j\rangle = \sum_{j=1}^{3} C_j(t) H|U_j\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{3} i\hbar \frac{d}{dt} C_j(t)|U_j\rangle = \sum_{j=1}^{3} C_j(t) E_j|U_j\rangle$$

où E_i est la v.p de H associée à $|U_i\rangle$

or $\{|U_i\rangle\}$ est une base donc libre $\Rightarrow$

$\forall j = 1,2,3$ $\quad i\hbar \frac{d}{dt} C_j(t) = C_j(t) E_j$

$\Rightarrow \forall j = 1,2,3$ $\quad \frac{dC_j(t)}{C_j(t)} = \frac{-i}{\hbar} E_j \, dt$

en integrant : $\quad \int \frac{dC_j(t)}{C_j(t)} dt = \int \frac{-i}{\hbar} E_j \, dt$

$\Rightarrow \forall j = 1, 2, 3 \quad \ln|C_j(t)| = \frac{-i}{\hbar} E_j t + K' \quad (K' \text{cte})$

Introduisant exp $\Rightarrow$

$$\boxed{C_j(t) = K e^{-\frac{i}{\hbar} E_j t}} \qquad j = 1, 2, 3$$

Si $t = 0$ alors $C_j(0) = K e^0 = K$

$j = 1$: $\quad K = C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$j = 2$ $\quad K = C_2(0) = \frac{1}{2}$

$j = 3$ $\quad K = C_3(0) = \frac{1}{2}$

les valeurs propres E_j :

$j = 1$: $\quad E_1 = \hbar\omega$

$j = 2$ $\quad E_2 = 2\hbar\omega$

$j = 3$ $\quad E_3 = 2\hbar\omega$

$\Rightarrow \quad C_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\cancel{\hbar}} \cancel{\hbar}\omega t} \quad ; \quad C_2(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\cancel{\hbar}} 2\cancel{\hbar}\omega t} = C_3(t)$

d'où $\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} |u_1\rangle + \frac{1}{2} e^{-2i\omega t} (|u_2\rangle + |u_3\rangle)}$

5) Evolution dans le temps

Thm d'Ehrenfest :

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [A;H]\rangle + \left\langle \frac{dA}{dt}\right\rangle$$

Pour A :

On a $[A;H]=0$ et A est independant du temps

donc $\frac{dA}{dt}=0$

$\Rightarrow \frac{d\langle A\rangle}{dt}=0 \Rightarrow \langle A\rangle_t = \langle A\rangle_0 = $ cte du Mvt

Comme $\langle A\rangle = \sum a_k \, Pr(a_k)$

$\Rightarrow$ les resultats de mesure sont les mêmes pour A avec les mêmes probabilités

Pour H :

On a $[H,H]=0$ et $\frac{dH}{dt}=0 \Rightarrow$

$\langle H\rangle_t = \langle H\rangle_0 = $ cte du Mvt

Comme $\langle H\rangle = \sum_k E_k \, Pr(E_k)$

d'où l'on obtient les mêmes mesures avec les mêmes probabilité pour H.

Exercice 2 :

$$\varphi_k(x) = \langle x | \varphi_k \rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$$

et $E_k = \dfrac{k^2 \pi^2 \hbar^2}{2m \cdot a^2}$ $\quad k \in \mathbb{Z}^*$

1) Les niveaux d'énergie E_k ne sont pas dégénérés car pour chaque valeur de k On a une valeur de E_k qui correspond à une seule valeur de $\varphi_k(x)$
(car φ_k est impaire par rapport à k)

2) à $t=0$ $\quad |\psi(0)\rangle = \sum_{k=1}^{4} c_k |\varphi_k\rangle$, $c_k \in \mathbb{C}^*$

a) Les valeurs trouver lorsque on mesure l'énergie à $t=0$:

Postulat 3 $\Rightarrow$ les valeurs de la mesure de l'énergie sont les valeurs propres de H :

$\text{Res}(\text{mes } H) = \{ v.p. \text{ de } H \}$

$\Rightarrow \text{Res}(\text{mes } H) = \{ E_1, E_2 ; E_3, E_4 \}$

$$\boxed{\text{Res}(\text{mes } H) = \left\{ \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} ; \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ma^2} ; \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} ; \frac{8\pi^2 \hbar^2}{ma^2} \right\}}$$

b) Calcule des probabilités

Postulat 4 $\Rightarrow$ $$P_r(E_K) = \frac{|\langle \varphi_K | \psi(0)\rangle|^2}{\langle \psi(0)|\psi(0)\rangle}$$

$$P_r(E_K) = \frac{\left| \langle \varphi_K | \sum_{j=1}^{4} c_j |\varphi_j\rangle \right|^2}{1}$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{4} c_j \langle \varphi_K | \varphi_j \rangle \right|^2$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{4} C_j \, \delta_{Kj} \right|^2 = |c_K|^2 \qquad K = 1, 2, 3, 4$$

$$\Rightarrow \quad P_r(E_1) = |c_1|^2 \quad ; \quad P_r(E_2) = |c_2|^2$$
$$P_r(E_3) = |c_3|^2 \quad ; \quad P_r(E_4) = |c_4|^2$$

Puisque $|\psi(0)\rangle$ est normé alors $\langle \psi(0)|\psi(0)\rangle = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} |C_i|^2 = 1 \Rightarrow \sum_{K=1}^{4} P_r(E_K) = 1 \quad \text{Prob Total}$$

c) $$P_r\left(E \leq \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ma^2}\right) = P_r(E_1) + P_r(E_2)$$
$$= |c_1|^2 + |C_2|^2$$

$$P_r\left(E \geq \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}\right) = P_r(E_3) + P_r(E_4)$$
$$= |C_3|^2 + |C_4|^2$$
$$= 1 - P\left(E < \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)$$
$$= 1 - \left(|c_1|^2 + |c_2|^2\right)$$

3) $$\langle H\rangle_0 = \sum_{k=1}^{4} E_k \, Pr(E_k)$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}|C_1|^2 + \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}|C_2|^2 + \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}|C_3|^2$$

$$+ \frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2}|C_4|^2$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(|C_1|^2 + 4|C_2|^2 + 9|C_3|^2 + 16|C_4|^2\right)$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(\overbrace{|C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2}^{=1} + 3|C_2|^2 + 8|C_3|^2 + 15|C_4|^2\right)$$

$$\boxed{\langle H\rangle_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(1+3|C_2|^2 + 8|C_3|^2 + 15|C_4|^2\right)}$$

4) À t quelconque on cherche $|\psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^{4} C_k(t)|\varphi_k\rangle$

Postulat 5 $\Rightarrow$ équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = E_k|\psi(t)\rangle$$

or E_k est indépendant du temps donc

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^{4} C_k(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}\, |\varphi_k\rangle}$$

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^{4} C_k^*(0)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} \langle\varphi_k| \sum_{j=1}^{4} C_j(0) e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t} |\varphi_j\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_k^*(0)\, C_j(0)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_k t}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t} \underbrace{\langle\varphi_k|\varphi_j\rangle}_{\delta_{kj}}$$

$$= \sum_{k=1}^{4} C_k^*(0)\, C_k(0)\, \cancel{e^{\frac{i}{\hbar}E_k t}}\, \cancel{e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}}$$

$$= \sum_{k=1}^{4} |C_k(0)|^2 = 1$$

d'où $|\psi(t)\rangle$ est normé.

conclusion : la norme est conservative dans le temps

5) Evolution dans le temps

D'après Théorème d'Ehrenfest :

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle \frac{dA}{dt}\right\rangle$$

* **Pour A ;** On a $[A,H]=0$ et A ne depend pas du temps donc $\frac{dA}{dt}=0$

$$\Rightarrow \frac{d\langle A\rangle}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \langle A\rangle_t = \langle A\rangle_0 = \text{cte du Mouvement}$$

Comme $\langle A \rangle = \sum_k a_k \, Pr(a_k)$

On en déduit que les resultats de mesure pour A sont les mêmes $\forall t$ et avec les m̂ probabilités.

* **Pour H :** On a $[H, H] = 0$, $\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = 0$$

$\Rightarrow \langle H \rangle_t = \langle H \rangle_0 = cte.$

or $\langle H \rangle = \sum_k E_k \, Pr(E_k)$ donc aussi $\forall t$ nous obtenons les mêmes resultats de mesures avec les mêmes probabilité.

6) $E_4 = \frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2}$

l'etat de la particule juste aprés la mesure est donneé par postulat 5 :

$$|\psi'(t)\rangle = \frac{P_4 |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(t)|P_4|\psi(t)\rangle}} = \frac{C_4}{|C_4|} e^{-\frac{i}{\hbar}E_4 t} |\varphi_4\rangle$$

où $P_4 = |\varphi_4\rangle\langle\varphi_4|$ avec $|\varphi_4\rangle$ est normée.

$\Rightarrow \quad |\psi'(t)\rangle \sim |\varphi_4\rangle$

Si on remesura l'énergie, l'etat étant $|\varphi_4\rangle$ On trouvera d'aprés postulat 4 :

$$E_4 = \frac{8\pi\hbar^2}{ma^2} \quad \text{avec } Pr(E_4) = 1$$

c'est un resultat certain.

Fin Serie 5