Université My ISMAIL
F.S.T. d'Errachidia
Département de Physique

A.U. 2016/2017
Filière M.I.P. S4
Module P147

Examen de Mécanique quantique

(Session Juin – Durée 2h)

Exercice I :

La longueur d'onde moyenne d'un rayonnement d'une lampe à filament incandescent est 12000 A°. Trouver le nombre de photons émis par unité de temps par une lampe de 200 Watts.

Problème :

On considère un système physique dont l'espace des états est à 3 dimensions et est rapporté à la base orthonormée $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$. L'hamiltonien de ce système est donné par $H = -\omega L_z$ où ω est une constante réelle et L_z un opérateur défini par $L_z|\varphi_1\rangle = \hbar|\varphi_1\rangle$, $L_z|\varphi_2\rangle = 0$ et $L_z|\varphi_3\rangle = -\hbar|\varphi_3\rangle$.

1. a/ Ecrire la matrice associée à l'opérateur L_z dans la base considérée.

   b/ L_z est-il hermitique ? Justifier votre réponse.

   c/ Donner les valeurs propres et les états propres normés de H.

2. On suppose qu'à l'instant t=0, le système est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[|\varphi_1\rangle + \sqrt{2}|\varphi_2\rangle + |\varphi_3\rangle\right]$$

a/ On mesure à cet instant l'énergie du système, quels résultats peut-on trouver ? Déterminer leurs probabilités.

b/ Calculer la valeur moyenne $\langle H\rangle$ ainsi que l'écart quadratique moyen $\Delta H = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2}$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$.

c/ Calculer $|\psi(t)\rangle$, état du système à un instant t ultérieur.

d/ Montrer que la valeur moyenne $\langle L_z\rangle$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$ est indépendante du temps. Donner sa valeur.

3. On considère maintenant les opérateurs. L_x et L_y définis dans la base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$ par : $L_x = \frac{h}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L_y = \frac{h}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a/ L_x et L_y sont-ils hermitiques ?

b/ Calculer $\langle L_x \rangle$ et $\langle L_y \rangle$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$.

c/ L_x et L_y sont-ils des constantes du mouvement ?

Examen MQ _ FST E _ 2016/2017

Exercice 1

$$\phi \simeq P = N \cdot h\nu = N \cdot E$$

$$\Rightarrow N = \frac{P}{E} = \frac{P}{h\nu} = \frac{P}{h\, c/\lambda} = \frac{P \cdot \lambda}{h \cdot c}$$

A.N: $N = \frac{200 \cdot 12000 \cdot 10^{-10}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = \frac{8 \cdot 10^{-10}}{6{,}62 \cdot 10^{-26}} = 1{,}2 \; 10^{16}$

Exercice 2 (Problème)

Données:

+ $\{|\varphi_1\rangle ; |\varphi_2\rangle ; |\varphi_3\rangle\}$ base orthonormé
+ l'Hamiltonien $H = -\omega L_z$

$L_z|\varphi_1\rangle = \hbar|\varphi_1\rangle$; $L_z|\varphi_2\rangle = 0$; $L_z|\varphi_3\rangle = -\hbar|\varphi_3\rangle$

1) a)

$$L_z|\varphi_1\rangle = \hbar|\varphi_1\rangle + 0|\varphi_2\rangle + 0|\varphi_2\rangle$$

$$L_z|\varphi_2\rangle = 0|\varphi_1\rangle + 0|\varphi_2\rangle + 0|\varphi_3\rangle$$

$$L_z|\varphi_3\rangle = 0|\varphi_1\rangle + 0|\varphi_2\rangle - \hbar|\varphi_3\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{L_z = \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix}}$$

b) verifions que $L^+ = L$

$$L_z^+ = (L_z^*)^t = \begin{pmatrix} \hbar^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar^* \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix} = L \qquad (\text{car } \hbar \in \mathbb{R})$$

d'où L_z est hermitique

c) Puisque H est diagonale alors les valeurs propres de H sont les éléments de la diagonale de H

$$H = \begin{pmatrix} -\omega\hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\omega \end{pmatrix}$$

les valeurs propres associés à H sont

* $-\omega\hbar$ valeur propre associé au ket propre $|\varphi_1\rangle$
* 0 valeur propre associé au ket propre $|\varphi_2\rangle$
* $\omega\hbar$ " " " " " " $|\varphi_3\rangle$

car $H|\varphi_1\rangle = -\omega\hbar\,|\varphi_1\rangle$

$H|\varphi_2\rangle = 0\,|\varphi_2\rangle$

$H|\varphi_3\rangle = \hbar\omega\,|\varphi_3\rangle$

2) À $t=0$ le système est dans l'état

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[|\varphi_1\rangle + \sqrt{2}\,|\varphi_2\rangle + |\varphi_3\rangle\right]$$

a) mesure de l'energie $\xrightarrow[\text{postulats ③}]{}$ Res(mes H}

$= \{$ val propres de H $\}$

$$\boxed{\text{Res (mes H)} = \{-\hbar\omega\,;\ 0\,;\ \hbar\omega\}}$$

Probabilités Tout les valeurs propres sont non dégénérées

$$Pr(-\hbar\omega) = \frac{|\langle\varphi_1|\psi(0)\rangle|^2}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^2}{1} = \frac{1}{4}$$

$$Pr(0) = \frac{|\langle\varphi_2|\psi(0)\rangle|^2}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$Pr(+\hbar\omega) = \frac{|\langle \varphi_3 | \psi(0)\rangle|^2}{\langle \psi(0)|\psi(0)\rangle} = \frac{(1/2)^2}{1} = \frac{1}{4}$$

$$\sum Pr(E_k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

b) Par définition $\langle H \rangle = \sum_{k=1}^{3} E_k \, Pr(E_k)$

$$\langle H \rangle = -\hbar\omega \cdot \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + \hbar\omega \times \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar\omega}{4} = 0$$

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} -\hbar\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\omega \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (-\hbar\omega)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\hbar\omega)^2 \end{pmatrix}$$

car H est diagonale.

$$H^2 = \begin{pmatrix} \hbar^2\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar^2\omega^2 \end{pmatrix}$$

H^2 est diagonale donc les valeurs propres de H^2 sont les éléments de la diagonale de H^2

$\hbar^2\omega^2$ valeur propre dégénérée deux fois

0 " " non dégénérée

$\Rightarrow$ Res (mes H^2) $= \{\hbar^2\omega^2 ; 0\}$

$$Pr(\hbar^2\omega^2) = \frac{|\langle \varphi_1 | \psi(0)\rangle|^2 + |\langle \varphi_3 | \psi(0)\rangle|^2}{\langle \psi(0)|\psi(0)\rangle}$$

$$= \frac{(1/2)^2 + (\frac{1}{2})^2}{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Pr(0) = \frac{|\langle \varphi_2 | \psi(0) \rangle|^2}{\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum Pr(E_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \langle H^2 \rangle = \sum_{k=} E_k^2 \, P(E_k)$$

$$= \hbar^2 \omega^2 . \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\langle H^2 \rangle = \frac{\hbar^2 \omega^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar^2 \omega^2}{2} - 0^2} = \frac{\hbar \omega}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,\hbar \omega}{2}$$

d'où $\boxed{\Delta H = \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \omega}$

c) Calculons $|\psi(t)\rangle$ dans un instant t

posons $|\psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^{3} c_k(t) \, |\varphi_k\rangle$

d'aprés le postulat ⑥ $|\psi(t)\rangle$ est régit par l'équation de Schrödinger:

$$H |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{3} c_k(t) \, |\varphi_k\rangle = H \sum_{k=1}^{3} c_k(t) \, |\varphi_k\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \sum_{k=1}^{3} \frac{d}{dt} c_k(t) \, |\varphi_k\rangle = \sum_{k=1}^{3} c_k(t) \, H |\varphi_k\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{3} i\hbar \frac{dc_k(t)}{dt} |\varphi_k\rangle = \sum_{k=1}^{3} c_k(t) \, E_k \, |\varphi_k\rangle$$

$$\forall \, k = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{3} \left(i\hbar \frac{dC_k(t)}{dt} - C_k(t)\, E_k \right) |\varphi_k\rangle = 0$$

puisque $\{|\varphi_k\rangle\}_{k=1,2,3}$ constitue une base donc c'est une partie libre

$$\Rightarrow \forall\, k = 1, 2, 3 \qquad i\hbar \frac{dC_k(t)}{dt} - C_k(t)\, E_k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dC_k(t)}{C_k(t)} = \frac{1}{i\hbar} E_k \, dt$$

$$\Rightarrow \frac{dC_k(t)}{C_k(t)} = \frac{-i}{\hbar} E_k \, dt$$

integrant $\Rightarrow$ $$\int \frac{dC_k(t)}{C_k(t)} = \int -\frac{i}{\hbar} E_k \, dt$$

$$\Rightarrow \ln |C_k(t)| = -\frac{i}{\hbar} E_k t + \alpha \quad (\alpha = cte)$$

Introduisant exp $\rightarrow$ $$C_k(t) = \beta\, e^{-\frac{i E_k t}{\hbar}}$$

à $t=0$ $\quad C_k(0) = \beta\, e^{0} = \beta$

$$\Rightarrow \boxed{C_k(t) = C_k(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \qquad k = 1, 2, 3}$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^{3} C_k(t)\, |\varphi_k\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{3} C_k(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \, |\varphi_k\rangle$$

$k=1$: $C_1(0) = \frac{1}{2}$; $E_1 = -\hbar\omega$

$k=2$: $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $E_2 = 0$

$k=3$: $C_3(0) = \frac{1}{2}$; $E_3 = \hbar\omega$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{\frac{i}{\hbar}\omega\hbar t} |\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{0} |\varphi_2\rangle + \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}\omega\hbar t} |\varphi_3\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{i\omega t} |\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_2\rangle + \frac{1}{2} e^{-i\omega t} |\varphi_3\rangle}$$

d) $\langle L_z \rangle = \sum_{k=1}^{3} E_k \, Pr(E_k)$

$Res(mes(L_z)) = \{\hbar \, ; \, 0 \, ; \, -\hbar\}$

$$Pr(\hbar) = \frac{|\langle \varphi_1 | \psi(t)\rangle|^2}{\langle \psi(t)|\psi(t)\rangle} = \frac{|\frac{1}{2} e^{i\omega t}|^2}{1} = \frac{1}{4}$$

$$Pr(0) = \frac{|\langle \varphi_2 | \psi(t)\rangle|^2}{\langle \psi(t)|\psi(t)\rangle} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$Pr(-\hbar) = \frac{|\langle \varphi_3 | \psi(t)\rangle|^2}{\langle \psi(t)|\psi(t)\rangle} = \frac{|\frac{1}{2} e^{-i\omega t}|^2}{1} = \frac{1}{4}$$

$$\sum Pr(E_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

(ici $\langle \psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$ car

$$\langle \psi(t)|\psi(t)\rangle = \left(\frac{1}{2}e^{-i\omega t} \, ; \, \frac{1}{\sqrt{2}} \, ; \, \frac{1}{2}e^{i\omega t}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{i\omega t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cancel{e^{-i\omega t}} \cancel{e^{i\omega t}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{4} \cancel{e^{i\omega t}} \cancel{e^{-i\omega t}}$$

$= 1$)

$$\Rightarrow \langle L_z \rangle = \sum E_k \, P(E_k)$$

$$= \hbar \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + (-\hbar) \times \frac{1}{4}$$

$$= 0$$

d'où $\langle L_z \rangle$ est indépendant du temps

L_z est une constant de Mouvement, En effet, d'après Thm d'Ehrenfest

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H] \rangle$$

or $\quad H = -\omega L_z$

$\Rightarrow [L_z, H] = [L_z, -\omega L_z] = -\omega [L_z, L_z] = 0$

L_z est indépendant du temps $\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\langle L_z\rangle}{dt} = 0$$

d'où L_z est une constant de Mouvement.

3) $L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_y = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Vérifiant si L_x et L_y sont hermitiques ?

$$L_x^+ = (L_x^*)^t = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^t = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = L_x$$

d'où $L_x^+ = L_x \Rightarrow L_x$ est hermitique.

$$L_y^+ = (L_y^*)^t = \frac{\hbar}{-i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

$$= \frac{\hbar}{-i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = L_y$$

$\Rightarrow L_y^+ = L_y \Rightarrow L_y$ est hermitique.

b) Calcul de $\langle L_x \rangle$ et $\langle L_y \rangle$

On peut calculer $\langle L_x \rangle$ en cherchant les valeurs propres de L_x et les probabilité associés et utiliser la formule $\langle L_x \rangle = \sum E_k P(E_k)$

ou bien utiliser le calcule matriciel :

$$\langle L_x \rangle = \frac{\langle \psi(t) | L_x | \psi(t) \rangle}{\underbrace{\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle}_{=1}} = \frac{\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} e^{-i\omega t} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{2} e^{i\omega t} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{i\omega t} \\ 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \end{pmatrix}}{1}$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} e^{-i\omega t} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{2} e^{i\omega t} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\omega t} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \right)$$

$$\boxed{\langle L_x \rangle = \hbar \cos(\omega t)}$$

$$\langle L_y \rangle = \frac{\langle \psi(t) | L_y | \psi(t) \rangle}{\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle} = \frac{\frac{\hbar}{i\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} e^{-i\omega t} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{2} e^{i\omega t} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{i\omega t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \end{pmatrix}}{1}$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}\, i} \left(\frac{1}{2} e^{-i\omega t} , \frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{2} e^{i\omega t} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}\, i} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega t} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega t} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\omega t} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}\, i} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \right) = -\hbar \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right)$$

$$\boxed{\langle L_y \rangle = -\hbar \sin \omega t}$$

c) $\langle L_x \rangle = \hbar \cos wt$

$\langle L_y \rangle = -\hbar \sin wt$

$\frac{d\langle L_x \rangle}{dt} = -\hbar w \sin wt \neq 0$

$\frac{d\langle L_y \rangle}{dt} = -\hbar w \cos wt \neq 0$

d'où L_x et L_y ne sont pas des constantes de Mouvements.