Université My ISMAIL
F.S.T. d'Errachidia
Département de Physique

A.U. 20017/20018
Filière M.I.P. S4
Module P147

Examen de Mécanique Quantique

(1ère session – Durée 2h)

Exercice :

1/ Ecrire l'équation de Schrödinger dépendante du temps, dans le cas d'une dimension.

2/ Montrer que $\psi(x,t) = A\exp[i(kx - \omega t)]$ est solution possible de l'équation de Schrödinger si les paramètres ondulatoires ω et k satisfont une relation que l'on déterminera. (on prendra par convention $V(x,t) = 0$)

3/ En remplaçant dans cette relation les paramètres ondulatoires par les paramètres corpusculaires associés, énergie E et quantité de mouvement P, montrer que l'on retrouve une des lois classiques de la mécanique.

Problème :

On considère un système physique dont l'espace des états est à deux dimensions. L'hamiltonien H_0 de ce système admet deux vecteurs propres $|U_1\rangle$ et $|U_2\rangle$, et son unique valeur propre E_0 est doublement dégénérée.

1/ Ecrire la matrice associée à l'opérateur H_0 dans la base $\{|U_1\rangle, |U_2\rangle\}$.

On établit sur le système une perturbation W. l'hamiltonien devient alors $H = H_0 + W$ avec W qui est défini dans la base $\{|U_1\rangle, |U_2\rangle\}$ par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & 0 \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

2/ Montrer que la perturbation fait disparaitre la dégénérescence. Pour cela, on calculera les nouvelles valeurs propres de l'hamiltonien perturbé H, ainsi que les nouveaux vecteurs propres normés décomposés dans la base $\{|U_1\rangle, |U_2\rangle\}$, que l'on notera $|+\rangle$ et $|-\rangle$.

3/ Montrer que la nouvelle base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ est complète.

4/ Développer les kets $|U_1\rangle$ et $|U_2\rangle$ dans cette nouvelle base.

5/ A l'instant initial $t = 0$, le système perturbé est dans un état $|\psi_0\rangle = |U_1\rangle$. Si on mesure à cet instant l'énergie du système, quels seraient les valeurs que l'on pourrait obtenir et avec quelles probabilités ? En déduire la valeur moyenne de l'énergie $\langle H\rangle_0$.

6/ Calculer $|\psi_t\rangle$, état du système perturbé à un instant t quelconque.

(FSTE) Examen MQ AU : 2017/2018

Exercice 1 :

1) Equation de Schrödinger à 1 dim

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} \quad (*)$$

2) $\psi(x,t) = A\exp(i(kx - \omega t))$ solution de (*)

$$\Rightarrow i\hbar \cancel{A}(-\omega i)\, \cancel{e^{i(kx-\omega t)}} = -\frac{\hbar^2 \cancel{A}}{2m}(ik)^2 \cancel{e^{i(kx-\omega t)}}$$

$$\Rightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\hbar}{2m}k^2 \Rightarrow \boxed{2m\omega - \hbar k^2 = 0}$$

3) En remplaçant ω et k par les relation :

$E = \hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar}$

$P = \hbar k \Rightarrow k = \frac{P}{\hbar}$

d'où $2m\frac{E}{\cancel{\hbar}} = \cancel{\hbar}\frac{P^2}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{P^2}{2m}}$$

On retrouve bien les lois de la mécanique classique.

Problème:

1) E_0 valeur propre de H_0 dégénérée deux fois et $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$ les deux kets propres de H_0:

$$H_0 |u_1\rangle = E_0 |u_1\rangle$$
$$H_0 |u_2\rangle = E_0 |u_2\rangle$$

$$\Rightarrow \quad H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Introduisant une perturbation W:

$$H_0 \longrightarrow H = H_0 + W$$

avec $W = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & 0 \end{pmatrix}$; $A \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}$$

2) cherchons les valeurs propres et kets propres de H :

- l'équation caractéristique:

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} E_0 - \lambda & -A \\ -A & E_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (E_0 - \lambda)^2 - A^2 = 0$$

$$\Rightarrow (E_0 - \lambda - A)(E_0 - \lambda + A) = 0$$

$$\Rightarrow E_0 - \lambda - A = 0 \quad \text{ou} \quad E_0 - \lambda + A = 0$$

2 $\quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = E_0 - A} \quad$ ou $\quad \boxed{\lambda_2 = E_0 + A}$

• Les Kets propres :

\# $\lambda_1 = E_0 - A$: soit $|\psi\rangle = a|u_1\rangle + b|u_2\rangle$

$H|\psi\rangle = \lambda_1|\psi\rangle$

$$\begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (E_0 - A)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_0 a - A b = (E_0 - A)\, a \\ -A a + E_0 b = (E_0 - A)\, b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{E_0 a} - A b = \cancel{E_0 a} - A a \\ -A a + \cancel{E_0 b} = \cancel{E_0 b} - A b \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{a = b} \Rightarrow |\psi\rangle = a|u_1\rangle + a|u_2\rangle$

puisque $|\psi\rangle$ est normé alors

$|a|^2 + |b|^2 = 1 \Rightarrow 2|a|^2 = 1 \Rightarrow |a|^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d'où on note $|\psi\rangle$ par $\boxed{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle)}$

\# $\lambda_2 = E_0 + A$: $|\psi\rangle = a|u_1\rangle + b|u_2\rangle$

$H|\psi\rangle = \lambda_2|\psi\rangle \Rightarrow$

3 $\begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (E_0 + A)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

(FSTE) Examen MQ AU. 2017/2018

Exercice 1 :

1) Equation de Schrödinger à 1 dim

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} \quad (*)$$

2) $\psi(x,t) = A\exp(i(kx-\omega t))$ solution de (*)

$$\Rightarrow i\hbar \cancel{A}(-\omega i)\, \cancel{e^{i(kx-\omega t)}} = -\frac{\hbar^2 \cancel{A}}{2m}(ik)^2 \cancel{e^{i(kx-\omega t)}}$$

$$\Rightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\hbar}{2m}k^2 \Rightarrow \boxed{2m\omega - \hbar k^2 = 0}$$

3) En remplaçant ω et k par les relation :

$E = \hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar}$

$P = \hbar k \Rightarrow k = \frac{P}{\hbar}$

d'où $2m\frac{E}{\cancel{\hbar}} = \cancel{\hbar}\frac{P^2}{\cancel{\hbar^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{P^2}{2m}}$$

On retrouve bien les lois de la mécanique classique.

3) Suite

puisque H admet des valeurs propres non dégénérées λ_1 et λ_2

alors les kets propres associés à λ_1 et λ_2 sont linéairement independants

càd que $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont deux

vecteurs linéairement independants

qui constitue une base complet de E

5) A t=0 l'etat du système est $|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle$

$$|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

La mesure de l'energie = Res(mes(H))

= {valeurs propres de H}

$$\text{Res}(\text{mes}(H)) = \{E_0 - A \,;\, E_0 + A\}$$

$$P_r(E_0 - A) = |\langle + | \psi_0\rangle|^2 = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_r(E_0 + A) = |\langle - | \psi_0\rangle|^2 = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

5

On a bien $P_r(E_0 - A) + P(E_0 + A) = 1$.

$$\langle H \rangle_0 = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \, P_r(\lambda_k)$$

$$= (E_0 - A) \times \frac{1}{2} + (E_0 + A) \times \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\langle H \rangle_0 = E_0}$$

6) À t quelconque $|\psi_t\rangle$ est regie par l'equation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

posons $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt}\left(a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle\right) = H\left(a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle\right)$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{da_+}{dt}|+\rangle + i\hbar \frac{da_-}{dt}|-\rangle = a_+(E_0 - A)|+\rangle + a_-(E_0 + A)|-\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar \dfrac{da_+}{dt} = a_+(E_0 - A) \\ i\hbar \dfrac{da_-}{dt} = a_-(E_0 - A) \end{cases}$$

difficile

voir page 7

3) Autrement

Soit $|\psi\rangle \in E$ alors $|\psi\rangle$ s'écrit d'une façons unique dans la base $\{|u_1\rangle ; |u_2\rangle\}$

$\Rightarrow \exists!\ a, b \in \mathbb{C}$ tq $|\psi\rangle = a|u_1\rangle + b|u_2\rangle$

remplaçons $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$

$$\Rightarrow \quad |\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}a(|+\rangle + |-\rangle) + b\frac{\sqrt{2}}{2}(|+\rangle - |-\rangle)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\,|+\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\,|-\rangle$$

posons $a' = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ et $b' = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$

d'où $\quad |\psi\rangle = a'\,|+\rangle + b'\,|-\rangle$

puisque a et b sont uniques alors aussi a' et b' sont uniques d'où $\{|+\rangle ; |-\rangle\}$ est une base complete de E.

4)

$$|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

6) A $t=0$ $\quad |\psi(t)\rangle = \sum_{k=+,-} C_k(t)\,|k\rangle$

$|\psi(t)\rangle$ est regit par l'equ de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \sum_{k=+,-} \frac{\partial}{\partial t} C_k(t)\,|k\rangle = H \sum_{k=+,-} C_k(t)\,|k\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial C_k(t)}{\partial t} = C_k(t)\,\lambda_k\,|k\rangle \qquad k=+,-$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{dC_k}{C_k} = \lambda_k\,dt \qquad k=+,-$$

$$\Rightarrow \frac{dC_k}{C_k} = \frac{1}{i\hbar}\lambda_k\,dt \qquad k=+,-$$

$$\Rightarrow \ln|C_k| = \frac{-i}{\hbar}\lambda_k t + \alpha$$

$$\Rightarrow C_k(t) = \beta\, e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda_k t} \qquad k=+,- \quad \beta = e^{\alpha}$$

$$t=0 \quad C_k(0) = \beta \Rightarrow C_k(t) = C_k(0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda_k t}$$

$k=+$ $\quad \lambda_1 = E_0 - A \quad ; \quad C_+(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$k=-$ $\quad \lambda_2 = E_0 + A \quad ; \quad C_-(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - A)t}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 + A)t}|-\rangle}$$

7