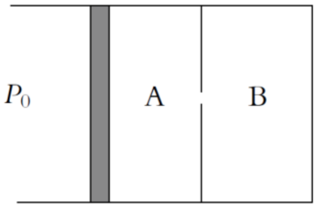
Faculté des Sciences **A.U : 2019/2020**
Filière SMP (SVI)

TD de thermodynamique appliquée
Série N° 0
(Rappel)

Exercice 1

Soit le dispositif de la figure ci-dessous. Les parois et le piston sont adiabatiques. La paroi interne est fixe et diatherme (elle permet les échanges thermiques). Elle est percée d'un trou fermé par une fenêtre amovible. La pression extérieure est P_0 = 1 bar. Initialement le volume A est rempli d'un gaz parfait ($P_0 = 1\ bar$, $T_0 = 300\ K$, $n = 1\ mol$) et le volume B est vide. Le rapport des capacités thermiques du gaz γ vaut $1,4$.



1. On ouvre la fenêtre. Décrire qualitativement ce qui se passe suivant la taille de l'enceinte B. En déduire l'existence d'un volume critique de B : V_C que l'on ne demande pas de calculer.

2. On suppose $V_B < V_C$.
a) On appelle V_1 le volume final occupé par le gaz. Déterminer le travail reçu par le gaz.
b) Déterminer l'état final du gaz (P_1, V_1, T_1) en fonction de P_0, V_A et V_B.
c) Calculer l'entropie créée. Conclure. Quelle est la cause de la création d'entropie ?
d) Déterminer V_C. Effectuer l'application numérique.

3. Reprendre les questions 2 dans le cas $V_B > V_C$

4. On suppose maintenant que seul le piston est adiabatique, et que le dispositif est maintenu à T_0 par un thermostat. On appelle V'_C le nouveau volume critique.
a) Déterminez le nouvel état final pour $VB < V'_C$.
b) Déterminez le nouveau volume critique V'_C.
c) Calculer l'entropie créée quand $VB < V'_C$.

Exercice 2

Le problème étudie le compresseur d'un moteur à air comprimé. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ g.mol^{-1}$, de capacité thermique massique à pression constante $c_p = 1\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$ et de rapport des capacités thermiques à pression et à volume constants $\gamma = 1,4$. La constante des gaz parfaits est $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

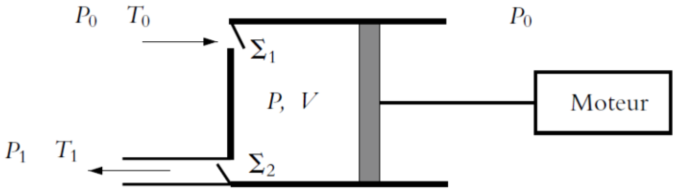
L'air est aspiré dans les conditions atmosphériques, sous la pression $P_0 = 1bar$ et à la température $T_0 = 290\ K$, jusqu'au volume V_m, puis comprimé jusqu'à la pression P_1, où il occupe le volume V_1, et refoulé à la température T_1 dans un milieu où la pression est $P_1 = 6\ bar$. Bien que le mécanisme réel d'un compresseur soit différent, on suppose que celui-ci fonctionne comme une pompe à piston, qui se compose d'un cylindre, d'un piston coulissant entraîné par un moteur et de deux soupapes.

• La soupape d'entrée $\sum_1$ est ouverte si la pression *P* dans le corps de pompe est inférieure ou égale à la pression atmosphérique P_0.

• La soupape de sortie $\sum_2$ est ouverte si *P* est supérieure à P_1.

• Le volume *V* du corps de pompe est compris entre *0* et V_m.

• Á chaque cycle (*chaque aller et retour du piston*), la pompe aspire et refoule une mole d'air.



1. a) Tracer sur un diagramme de Watt (*P* en ordonnée, *V* en abscisse) l'allure de la courbe représentant un aller et un retour du piston. Indiquer le sens de parcours par une flèche.

b) Montrer que le travail de l'air à droite du piston est nul sur un aller-retour. Représenter sur ce diagramme le travail fourni par le moteur qui actionne le piston. On supposera que le mouvement est assez lent pour que l'évolution soit réversible.

2. Pendant la phase de compression, l'air suit une loi polytropique $PV^k = cste$; il sort du compresseur à la température $T_1 = 391\ K$.

a) Montrer que $k = 1,20$.

b) Exprimer le travail mécanique W_{moteur} fourni par le moteur pendant un aller-retour en fonction de R, n, k, T_1 et T_0. Calculer numériquement W_{moteur}.

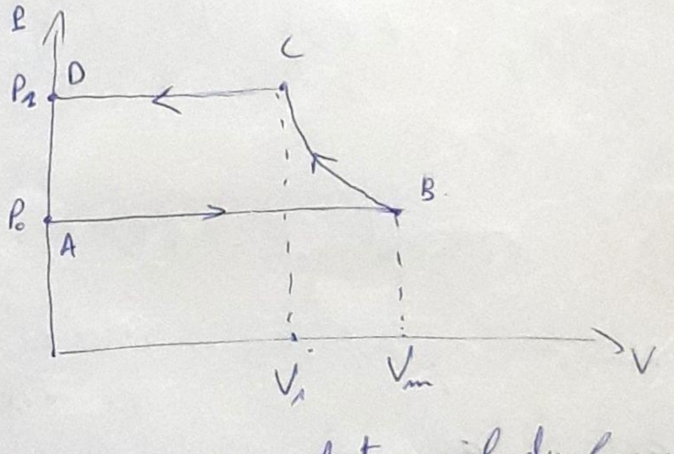
c) Au cours d'un cycle, le système constitué par une mole d'air est transvasé et reçoit le transfert thermique Q. En tenant compte du travail des forces de pression du gaz extérieur au cylindre de la pompe, démontrer que la somme $W_{moteur} + Q = \Delta H$. Calculer numériquement Q. Interpréter le signe de Q.

Serie 0

Exercice 1

1) a) le système est le gaz dans le corps de la pompe pendant la première phase. l'évolution étudiée comporte les trois étapes suivantes :

- admission du gaz de A à B à la pression P_0 ;
- compression de B à C ;
- refoulement de C à D à la pression P_1.



b) la pression extérieure, donc le travail des forces de pression du gaz à droite du piston est :

$W_{droite} = W_{droite, AB} + W_{droite, BC} + W_{droite, CD} = P_0 (V_B - V_A + V_C - V_B + V_D - V_C) = 0$

Effectivement, puisque le piston effectue un aller-retour, le volume balayé est le même à l'aller (travail résistant) et au retour (travail moteur)

la force exercée par le moteur pour déplacer le piston est

$F = (P - P_0) S$, où S est la section du piston, donc le travail fourni par le moteur est:

$$W_{moteur} = -\int_{ABCD} (P-P_0)\,dV = -\int_{ABCD} P\,dV - W_{droite} = -\int_{ABCD} P\,dV$$

$\xrightarrow{\text{aller}}$

$\xleftarrow[\text{retour}]{}$

W_{moteur} est donc l'aire du cycle. C'est ce qu'on appelle habituellement le travail de l'opérateur.

2) a) on étudie le gaz dans le corps de pompe entre B et C.

la loi polytropique et l'équation du gaz parfait donnent:

$$\begin{cases} P_B V_B^K = P_C V_C^K \\ P_B V_B = nRT_B \quad \text{et} \quad P_C V_C = nRT_C \end{cases}$$

en combinant ces expressions, on obtient:

$$\left(\frac{P_C}{P_B}\right) = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^K \Longrightarrow$$

~~Comme on veut calculer K, on prend le logarithme de cette expression, ce qui donne:~~

$$\left.\begin{aligned} V_B &= \frac{nRT_B}{P_B} \\ V_C &= \frac{nRT_C}{P_C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^K = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^K \left(\frac{P_C}{P_B}\right)^K$$

$$\Rightarrow \frac{P_C}{P_B} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^K \left(\frac{P_C}{P_B}\right)^K \Rightarrow \frac{P_C}{P_B}\left(\frac{P_B}{P_C}\right)^K = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^K$$

$$\Rightarrow \left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{K-1} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^K$$

$$\ln\left(\left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{K-1}\right) = \ln\left(\left(\frac{T_B}{T_C}\right)^K\right)$$

$$(K-1)\ln\left(\frac{P_B}{P_C}\right) = K\ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right)$$

$$K\left(\ln\left(\frac{P_B}{P_C}\right) - \ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right)\right) = \ln\left(\frac{P_B}{P_C}\right)$$

$$\Rightarrow K = \frac{\ln\left(\frac{P_B}{P_C}\right)}{\ln\left(\frac{P_B}{P_C}\right) - \ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right)} = 1{,}2$$

B) on a vu précédement que $W_{moteur} = \int -P\,dV$

on décompose le calcul suivant les trois transformations.

- de A à B, $P = P_0$;

$$W_{moteur,AB} = -P_0\int_0^{V_m} dV = -P_0 V_m = -nRT_0.$$

- de B à C

$$W_{moteur,BC} = \int_{V_m}^{V_1}(-P\,dV) = -P_0 V_m^K \int_{V_m}^{V_1} \frac{dV}{V^K}$$

$$= \frac{P_0 V_m^K}{1-K}\left[V^{-K+1}\right]_{V_m}^{V_1}$$

ce qui s'écrit

$$W_{moteur,BC} = \frac{P_0 V_m}{K-1}\left(\left(\frac{V_m}{V_1}\right)^{K-1} - 1\right)$$

or :

$$\left(\frac{V_m}{V_1}\right)^{K-1} = \left(\frac{V_m}{V_1}\right)^{K}\frac{V_1}{V_m} = \frac{P_1 V_1}{P_0 V_m} = \frac{T_1}{T_0}$$ et

d'où finalement :

$$W_{moteur,BC} = \frac{P_0 V_m}{K-1}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)$$

- de C à D $P = P_1$ et

$$W_{CD} = -\int_{V_1}^{0} P_1\, dV = P_1 V_1 = nRT_1$$

Ainsi finalement :

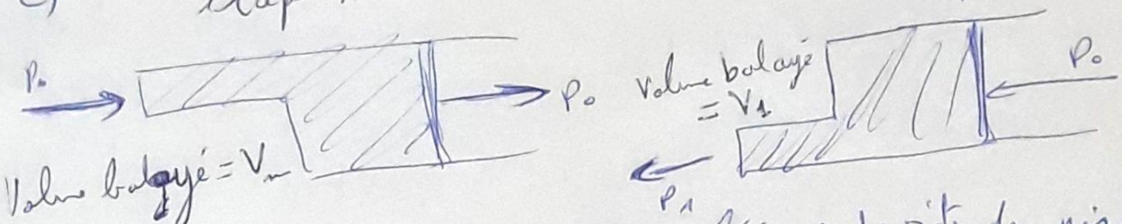
$$\cancel{W_{moteur} = \frac{P_0 V_m}{K-1}\left(nR\frac{T_1}{T_0} - 1\right) + \frac{P_0 V_m}{K-1}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)}$$

$$\begin{aligned}
W_{moteur} &= W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} \\
&= -nRT_0 + \frac{P_0 V_m}{K-1}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) + nRT_1 \\
&= \frac{P_0 V_m}{K-1}\left(\frac{T_1 - T_0}{T_0}\right) + nR(T_1 - T_0) \\
&= \frac{nR}{K-1}\left(\frac{T_1 - T_0}{\cancel{T_0}}\right) + \frac{nR}{\cancel{T_0}}(T_1 - T_0) \\
&= nR(T_1 - T_0)\left(\frac{1}{K-1} + 1\right) \\
&= \frac{K}{K-1}\, nR(T_1 - T_0).
\end{aligned}$$

la pompe aspire une mole d'air à chaque aller et retour $\Longrightarrow n = 1$

$$\Longrightarrow W_{moteur} = 5{,}04\ kJ.$$

c) étape AB étape CD.



On a montré que le travail de l'air à droite du piston

W_{droite} est nulle sur un aller et retour.

il reste à calculer le travail de l'atmosphère à gauche de la tranche d'aire aspiré pendant AB et de travail de l'air du réservoir à gauche de la tranche d'air transvasée pendant CD.

- dans le premier cas, le volume balayé est V_m, à la pression P_0:

le travail moteur est $W_{gauch} = P_0 V_m$.

- pendant le refoulement, la pression du gaz qui s'oppose au refoulement dans le réservoir est P_1, le volume balayé est V_1.

et le travail résistant est donc $W_{gauch,CD} = -P_1 V_1$

on applique le premier principe du gaz admis dans le cylindre pendant un aller et retour:

$$\Delta U = U_D - U_A = W_{tot} + \varphi = W_{droit} + W_{gauche,AB} + W_{gauche,CD} + W_{moteur} + \varphi$$

or $U_A + P_0 V_m = H_A$, $U_D + P_1 V_1 = H_D$ et $W_{droite} = 0$

soit finalement. $\Delta H = W_{moteur} + \varphi$

on en déduit: $\varphi = \dfrac{nRK}{K-1}(T_1 - T_0) - W_{moteur} = -2{,}1\ 10^{3}\ \mathrm{Kj.mol^{-1}}$

φ est négatif, donc le système perd du transfert thermique

Exercice II

1) Dès que la fenêtre est ouverte, le gaz de l'enceinte A diffuse vers l'enceinte B. Si B est suffisament grand $(V_B > V_c)$ tout le gaz de A se trouve dans B et dans l'état final, le piston est contre la paroi.

Si $V_B < V_c$, il reste du gaz dans A et le piston s'immobilise avant la cloison. Dans ce cas, comme le piston est à l'équilibre dans l'état final, la pression dans le gaz est P_0.

2. a) Le travail reçu par le gaz est dû au déplacement du piston, il est égal à $P_0 V_{balayé}$. Le volume balayé est:

$$V_{balayé} = V_A + V_B - V_1$$

donc le travail est: $W = P_0 (V_A + V_B - V_1)$.

b) puisque $V_B < V_c$, la pression finale du gaz est P_0. Le système (S) considéré est constitué du gaz, du cylindre et du piston.

l'état initial et l'état final du gaz sont:

Etat initial $\begin{cases} P_0 \\ V_A \\ T_0 \end{cases}$ Etat final $\begin{cases} P_1 = P_0 \\ V_1 \\ T_1 \end{cases}$

L'application du premier principe à (S) donne:

$$\Delta U_{gaz} + \Delta U_{enceinte} + \Delta U_{piston} + \Delta E_{c\,piston} = W + Q$$

On suppose que les capacités thermiques du piston et de l'enceinte sont négligeables, donc $\Delta U_{piston} \simeq 0$ et $\Delta U_{enceinte} \simeq 0$.

Le piston est immobile dans les états extrêmes donc $\Delta E_{c\,piston} = 0$.

Enfin la transformation est adiabatique donc $Q = 0$.

finalement :

$$\Delta U = W \Longrightarrow \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = P_0 (V_A + V_B - V_1).$$

L'équation du gaz parfait donne $nRT_1 = P_0 V_1$.

En combinant les deux expression. on obtient.

$$T_1 = \frac{P_0}{nR}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B + V_A\right)$$

$$V_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B + V_A.$$

c) Pour calculer la variation d'entropie du gaz, on imagine une transformation quasi-statique <u>isobare</u> allant du même état initial au même état final. Puisque S est une fonction d'état, sa variation est la même dans les deux transformations. on applique l'identité thermodynamique entre deux états d'équilibre voisins.

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{VdP}{T}$$

$$dS = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\frac{dT}{T} - \frac{VdP}{T} = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\frac{dT}{T}$$

à partir de la relation générale de l'entropie

$$\longrightarrow \Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_0}$$

<u>Remarque</u> : on peut aussi utiliser (ou retrouver rapidement) l'expression de l'entropie d'un gaz parfait en variables (P, T) puisqu'on connaît la pression et la température dans l'état initial et dans l'état final. on introduit les valeurs des températures trouvées précédemment :

$$\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$

la transformation est bien irréversible. L'origine de l'irréversibilité est la différence de densité entre l'intérieur et l'extérieur du récipient A.

d) A la limite si $V_B = V_C$, le volume final V_1 est égal à V_B, soit :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} V_c + V_A = V_c \Rightarrow V_c = \gamma V_A$$

L'application numérique donne

$$V_c = \gamma V_A = \gamma \frac{nRT_0}{P_0} = 0{,}035 \text{ m}^3 = 35 \text{ l}$$

3) Dans ce cas on ne connaît pas la pression dans l'état final puisque le piston est retenu par la cloison, mais on connaît le volume final. L'état initial et l'état final du gaz sont :

$$\text{Etat initial} \left| \begin{array}{l} P_0 \\ V_A \\ T_0 \end{array} \right. \qquad \text{Etat final} \left| \begin{array}{l} P_1 \\ V_B \\ T_1 \end{array} \right.$$

le volume balayé est V_A donc le travail est $W = P_0 V_A$.

Le premier principe donne :

$$\Delta U_{gaz} = W \Rightarrow \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = P_0 V_A.$$

Or $P_0 V_A = nRT_0$, donc :

$$T_1 = \gamma T_0 \quad \text{et} \quad P_1 = \frac{nRT_1}{V_B} = \gamma P_0 \frac{V_A}{V_B}$$

On remarque que $P_1 < P_0$, ce qui confirme la condition de validité de l'hypothèse $V_B > V_c$.

Pour calculer la variation d'entropie, on utilise l'expression de l'entropie d'un gaz parfait en variable (T, V)

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_1 V_B^{\gamma-1}}{T_0 V_A^{\gamma-1}}\right)$$

$$= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\gamma \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}\right)$$

l'évolution est adiabatique donc l'entropie créée est égal à ΔS. on sait que $V_B > V_C$ donc $V_B > \gamma V_A$, et :

$$\frac{V_B}{V_A} > \gamma \Rightarrow \gamma \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} > \gamma^{\gamma-1} > 1$$

l'argument du logarithme est plus grand que 1, $S_{créée} > 0$ et la transformation est irréversible, pour la même raison précédemment.

---

4) a) le système est le même que précédemment et puisque $V_B < V_C'$, le piston s'arrête avant la cloison donc la pression finale est P_0

L'état initial et l'état final du gaz sont :

$$\text{Etat initial} \left\{ \begin{array}{l} P_0 \\ V_A \\ T_0 \end{array} \right. \qquad \text{Etat final} \left/ \begin{array}{l} P_0 \\ V_1 \\ T_0 \end{array} \right.$$

on en déduit le volume final : $V_1 = \frac{nRT_0}{P_0} = V_0 = V_A$

le piston n'a fait que traverser le gaz sans changer son état.

b) le nouveau volume critique vérifie $V_1 = V_C'$, soit $V_C' = V_A$.

le variables d'état du gaz sont inchangées,

c) puisque les variables d'état du gaz sont inchangées, la variation d'entropie du gaz est nulle :

$$\Delta S = 0 \Longrightarrow S_{créée} = -S_{éch}$$

on calcule l'entropie échangée avec le thermostat à la température T_0 :

$$\Delta S = 0 \Rightarrow S_{créée} = -S_{éch}$$

on calcule l'entropie échangée avec le thermostat à la température T_0 : $S_{éch} = \frac{Q}{T_0}$

premier principe $\Delta U = 0$ car $T = \underline{ct} \rightarrow Q = -W = -P_0 V_1 = -nRT_0$ donc

$S_{éch} = -nR$ et $S_{créée} = nR > 0$ la transformation est irréversible