Module M123, Analyse 2
Examens de 2014 à 2020

Jeudi 9 juillet 2020

Université My Ismail **Année Univer. 2014-2015**
F. S. T. Errachidia **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths **Resp. Mustapha Laayouni**

Examen du 17 avril
Durée: deux heures

Exercice1:[1] On pose: $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2(t)} dt.$
(i) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F.
(ii) Montrer que, pour x non nul $F(-x) = -F(x)$ et que F est prolongeable en une fonction continue en 0. Calculer $F'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(iii) Etudier F quand x tend vers ∞.

Exercice2: Intégrer les équations différentielles suivantes:

(E_1): $ch(x)\, y' + sh(x)\, y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(E_2): $y'' - 3y' + 2y = x + xe^{2x} + x\sin(x)$.

Exercice3: Etudier la convergence des suites $(v_n)_{n \geqslant 1}$ et $(w_n)_{n \geqslant 0}$ si:

(i) $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

(ii) $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{e^k + \sqrt{k} + 1}$.

[1] La rigueur est sollicitée. Bon courage!

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2014-2015
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Examen de jun Section 2
Durée: deux heures

Exercice1: Calculer les limites des suites suivantes :
(i) $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}$ (ii) $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice2: Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$ si $n \in \mathbb{N}$.
(i) Montrer que $(I_n)_n$ est une suite positive décroissante.
(ii) Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et expliciter I_n.
(iii) En déduire $\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n dx$.

Exercice3: Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$y'' + 5y' + 6y = x + e^{2x} + \sin(2x)$$

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2014-2015
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Examen de rattrapage
Durée: une heure

Exercice1: Soit g la fonction réelle définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = ax$ (où $a \in \mathbb{R}_+^*$). Montrer à l'aide de la définition que g est intégrable et calculer son intégrale.

Exercice2: Intégrer l'équation différentielle suivante

$$(E): \; y'' + y' + y = \sin(x) + xe^{2x}$$

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2015-2016
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Examen d'avril
Durée: deux heures

Exercice1: Considérons la fonction réelle F définie par:

$$F(x) = \int_0^{x^2+1} \ln(1+t)\, dt$$

Déterminer le domaine de définition D_F de F. Montrer que F est dérivable en tout point où elle est définie. Calculer $F'(x)$, pour tout $x \in D_F$.

Exercice2: Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que:

$$u_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+n^3}$$

Exercice3: Intégrer les équations différentielles suivantes:

(E_1): $ch\,(x)\, y' + sh\,(x)\, y = \frac{1}{1+x^2}$.

(E_2): $y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}$.

[2]

[2]La rigueur est sollicitée. Bon courage!

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2015-2016
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Examen de rattrapage d'avril
Durée: une heure

Exercice1: Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer à l'aide de la définition que la fonction réelle $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$ est intégrable au sens de Riemann.

Exercice2: Intégrer les équations différentielles suivantes:

(E_1): $ch\,(x)\, y' + sh\,(x)\, y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(E_2): $y'' - 3y' + 2y = x + xe^{2x} + \sin(3x)$.

[3]

[3] La rigueur est sollicitée. Bon courage!

Solution de l'exercice1 : Montrons à l'aide du théoème caractéristique (qu'on peut cosidérer comme définition), que la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que:
$f(x) = ax$ pour un certain $a \in \mathbb{R}_+^*$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Pour tou $n \geqslant 1$, on consdère la subdivision de $[0, 1]$ telle que

$$S_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, ..., x_k = \frac{k}{n}, ...x_n = 1 \right\}$$

qui va être associée aux fonctions en escalier définies par

$$\varphi_n(t) = ax_i,\ \psi_n(t) = ax_{i+1}, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, 1, ..., n-1$$

$$\varphi_n(x_i) = 0, \psi_n(x_i) = a,\ i = 0, 1, ..., n-1$$

Puisque f es strictement croissante, donc

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_n(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_i\left(x_{i+1} - x_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a\frac{i}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{a}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i \\
&= \frac{a}{n^2}\frac{n\left(n-1\right)}{2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi_n(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_{i+1}\left(x_{i+1} - x_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a\frac{i+1}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{a}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i+1 \\
&= \frac{a}{n^2}\frac{n\left(n+1\right)}{2}
\end{aligned}$$

D'où
$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \varphi_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \psi_n(t)dt = \frac{a}{2}$$
Ainsi f est intégrable sur $[0,1]$ et son intégrale vaut $\displaystyle\int_0^1 (at)dt = \frac{a}{2}$

Solution de l'exercice2 : Intégrons les équations différentielles suivantes:

(E_1): $ch\,(x)\,y' + sh\,(x)\,y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Posons $z\,(x) = y\,(x)\,ch\,(x)$. Par déeivation on obtient
$$z'\,(x) = y'\,(x)\,ch\,(x) + y\,(x)\,sh\,(x)$$
donc (E_1): se transorme en (E_1'): $z'\,(x) = \arcsin'(x)$, dont la solution générale est
$$z\,(x) = \arcsin(x) + cte$$
Ainsi, la solution générale de (E_1) est
$$y\,(x) = \frac{\arcsin(x) + \kappa}{ch\,(x)}\ \ \kappa \in \mathbb{R}.$$

Pour (E_2): $y'' - 3y' + 2y = x + xe^{2x} + \sin(3x)$, d'équations homogène et caractéristique respectivement:
$$(H_2):\ y'' - 3y' + 2y = 0$$
$$(C_2):\ r^2 - 3r + 2 = 0$$
Le discriminant $\Delta_2 = (-3)^2 - 4\times 2 = 1$. Donc les soltions de (C_2) sont
$$r_1 = \frac{3-1}{2} = 1,\ \text{et}\ r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$
Par suite, la solution générale de (H_2) est
$$y_0\,(x) = Ae^x + Be^{2x}\ (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

Pour déterminer une solution particulière y_p de (E_1), il suffit d'appliquer le principe de la superposition, En effet le second membre est

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

où

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = xe^{2x} \text{ et } f_3(x) = \sin(3x)$$

qui donnent les équations suivantes:

(E_{21}): $y'' - 3y' + 2y = x$

(E_{22}): $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$

(E_{23}): $y'' - 3y' + 2y = \sin(3x)$

D'après le cours, une solution particulière de:

(E_{21}) est $y_1(x) = ax + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

(E_{22}) est $y_2(x) = (ex^2 + fx + g)\, e^{2x}$, avec $(e, f, g) \in \mathbb{R}^3$,

(E_{23}) est $y_3(x) = M\cos(3x) + N\sin(3x)$, avec $(M, N) \in \mathbb{R}^2$,

(E_2) est $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$.

Conclusion: la solution générale de (E_2) est

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$$

.

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2015-2016
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Examen de juin
Durée: deux heures

Exercice1: Considérons la fonction réelle F définie par:

$$F(x) = \int_0^{x^2+1} \ln(1+t)\, dt$$

1) Déterminer le domaine de définition D_F de F.
2) Montrer que F est dérivable en tout point où elle est définie.
3) Calculer $F'(x)$, pour tout $x \in D_F$.

Exercice2: Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de la suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 1}$ telle que:

$$u_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3 + n^3}$$

Exercice3: Intégrer les équations différentielles suivantes:

(E_1): $ch\,(x)\, y' + sh\,(x)\, y = \frac{1}{1+x^2}$.

(E_2): $y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}$.

[4]

[4]Soyez rigoureux Bon courage!

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2015-2016
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Session de rattrapage de juin
Durée: 1H 30 mn

Exercice1: Considérons la fonction réelle F définie par:

$$F(x) = \int_0^{e^{x^2}} \ln(1+t)\, dt$$

1) Montrer que F est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2) Calculer $F'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice2: Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de la suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 1}$ telle que:

$$u_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + n^2}$$

Exercice3: Intégrer l équation différentielle suivante:

(E): $y'' + y = \cos(x) + xe^x$.

[5]

[5]Soyez rigoureux Bon courage!

Université My Ismail | **Année Univer. 2016-2017**
F. S. T. Errachidia | **Parcours MIP. AnalyseII**
Départ. de Maths | **Resp. Mustapha Laayouni**

Examen de Janvier

Durée: deux heures

Exercice1: Considérons la fonction réelle F définie par:

$$F(x) = \int_0^{1+x^4} \ln(1+t)\,dt$$

1) Montrer que F est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2) Calculer $F'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice2: Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que:

$$u_n = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$$

Exercice3: Intégrer l équation différentielle suivante:

(E): $y'' + y = xe^x$.

[5]La rigueur et la présentation seront prises en compte.

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2016-2017
Parcours MIP. AnalyseII
Resp. Mustapha Laayouni

Examen de Février

Durée: 1H 30mn

Exercice1: Considérons la fonction réelle F définie par:

$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{1+x^2}} \ln(1+t)dt$$

1) Montrer que F est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2) Calculer $F'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice2: Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{k^2+n^2}$$

Exercice3: Intégrer l équation différentielle suivante:

(E): $y'' - y = e^x$.

[5] La rigueur et la présentation seront prises en compte.

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2017-2018
Parcours MIP. AnalyseII
Resp. Mustapha Laayouni

Session normale. Sect1

Durée: Deux heures

Exercice1: Calculer:

(i) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\int_{x^2}^{1+x^2} e^{-t^2}dt\right]$

(ii) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$

Exercice2 Déterminer les limites suivantes:

1) $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right].$

2) $\lim_{n\to+\infty}\left[n^2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^3+n^3}\right].$

Exercice3 Intégrer l' équation différentielle suivante:

$(E):\ 6y'-2y=xy^4.$

---

[5]Soyez rigoureux. Bon courage

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2017-2018
Parcours MIP. AnalyseII
Resp. Mustapha Laayouni

Examen de rattrapage. Sect1

Durée: Une heure

Exercice. Déterminer:

1) La dérivée $\Gamma'(x)$, là où elle est définie, de la fonction Γ donnée par:

$$\Gamma(x) = \int_0^{x^2} \ln\left(1 + t^2\right) dt$$

2) La limite suivante:

$$\lim_{n\to+\infty} 2n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + n^2}$$

3) La somme de la série:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k! 3^{n-k}}$$

4)Toutes les solutions de l'équation différentielle suivante:

$$sh(x)\, y + ch(x)\, y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

[5]Soyez rigoureux. Bon courage

Université My Ismail | **Année Univer. 2017-2018**
F. S. T. Errachidia | **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths | **Resp. Mustapha Laayouni**

Examen de la session normale. Sect2

Durée: deux heures

Exercice1: Calculer les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

Exercice2: Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent:

$$(i) \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} \int_0^x \cos(t) e^{t^2} dt \right]$$

$$(ii) \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k! 9^k}$$

$$(iii) \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t+1}{t+2} e^{\sin(t)} dt \right]$$

Exercice3: Intégrer les équations différentielles suivantes:

(E_1) $ch(x)y' + sh(x)y = \frac{1}{x^2+1}$

(E_2) $y'' + 4y' + 5y = x \sin(x) e^{-2x}$

[5]Barème Ex1: 1+3, Ex2: 4+2+4, Ex3: 2+4

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2017-2018
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Examen de la session de rattrapage

Durée: deux heures

Exercice1: Calculer les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

Exercice2: Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent:

$$(i) \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} dt \right]$$

$$(ii) \lim_{n \to +\infty} \left[n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2} \right]$$

$$(iii) \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^{2018} + 1}{t^{2018} + 2} dt \right]$$

Exercice3: Intégrer les équations différentielles suivantes:

(E_1) $(1 + x^2)\, y' + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$

(E_2) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

[5]Barème Ex1: 1+3, Ex2: 4+2+4, Ex3: 2+4

Université My Ismail **Année Univer. 2018-2019**
F. S. T. Errachidia **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths **Resp. Mustapha Laayouni**

Examen de la session normale

Durée: Deux heures

Exercice. Déterminer:

1) La dérivée $\Gamma'(x)$, là où elle est définie, de la fonction Γ donnée par:

$$\Gamma(x) = \int_{x^2}^{1+x^2} e^{-t^2} dt$$

2) Les limites suivantes:

$$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+\cos^2(t)} dt$$

$$(ii)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

$$(iii)\ \lim_{n\to +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

3)Toutes les solutions des équations différentielles suivantes:

$$(E_1):\ 2xy + \left(x^2+1\right) y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(E_2):\ y'' + 4y' + 5y = x \sin(x)\, e^{-2x}$$

[5]**Soyez sages et rigoureux! Bon courage!**

Université My Ismail **Année Univer. 2018-2019**
F. S. T. Errachidia **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths **Resp. Mustapha Laayouni**

Examen de la session de rattrapage

Durée: une heure 30 mn

Exercice. Déterminer:

1) la limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[n^3\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{n^4+k^4}\right].\,(5\,points)$$

2) la valeur de l'intégrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}dx.\,(5\,points)$$

3) la valeur de la série:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^n}{k!}\frac{1}{3^{n-k}}.\,(5\,points)$$

4) toutes les solutions de l équation différentielle:

$$(E):\ y''+4y'+5y=\frac{1}{\sin(x)}e^{-2x}.\,(5\,points)$$

---

[5]**Soyez sages et rigoureux! Bon courage!**

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2018-2019
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Examen de rattrapage

Durée : 1H30mn

Exercice. Déterminer:

1) La dérivée $\mathit{\Gamma}'(x)$, là où elle est définie, de la fonction $\mathit{\Gamma}$ donnée par:

$$\mathit{\Gamma}(x) = \int_0^{1+x^2} e^{t^2} dt$$

2) La limite suivante:

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^4 - n^4}$$

3) La somme de la série:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!3^{n-k}}$$

4)Toutes les solutions de l'équation différentielle suivante:

$$2xy + \left(x^2+1\right) y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2019-2020
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Test à blanc (Covid.19)

Jeudi 18 juin. Durée: une heure

Exercice1: Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2 + \cos(t)} dt \right) \tag{0.-8}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \int_x^{2x} \frac{t+1}{t\left(1 + \cos^2(t)\right)} dt \right) \tag{0.-7}$$

Exercice2: Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$ch\,(x)\, y' + sh\,(x)\, y = \frac{1}{1 + x^2} \tag{0.-6}$$

$$y'' + 5y' + 6y = \cos(x) + e^{2x} + \sin(2x) \tag{0.-5}$$

Correction du test à blanc

Jeudi 02 juillet 2020

Exercice1:
Pour calculer la limite

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}dt\right)$$

il suffit d'appliquer la formule de la moyenne à $[a,b]=[0,x]$ et à la fonction $t\mapsto f(t)=\dfrac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ le compact $[0,1]\supset[0,x]$, $x\sim 0^+$. Soient alors $m=\min\{f(t),t\in[0,1]\}$ et $M=\max\{f(t),t\in[0,1]\}$. La formule de la moyenne nous mène à

$$m\leqslant \frac{1}{x-0}\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}\leqslant M$$

Par suite

$$xm\leqslant \int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}dt\leqslant xM$$

D'où

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}dt\right)=0$$

De même la fonction

$$g : t \mapsto g(t) = \frac{t+1}{t\left(1+\cos^2(t)\right)}$$

est continue sur $[1, +\infty[$ et pour $t \sim +\infty$ on a $|g(t)| \leqslant 1$. Or pour $x \sim +\infty$ on a $[x, 2x] \subset [1, +\infty[$, donc

$$m = \inf\{g(t), 1 \leqslant t < +\infty\} \text{ et } M = \sup\{g(t), 1 \leqslant t < +\infty\}$$

existent bien dans $\mathbb{R}$ et d'après la formule de la moyenne

$$m \leqslant \frac{1}{2x-x}\int_x^{2x} \frac{t+1}{t\left(1+\cos^2(t)\right)} \leqslant M$$

Puisque $x > 0$ on aura

$$\frac{m}{x} \leqslant \frac{1}{x^2}\int_x^{2x} \frac{t+1}{t\left(1+\cos^2(t)dt\right)}dt \leqslant \frac{M}{x}$$

Par conséquence,

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\int_x^{2x} \frac{t+1}{t\left(1+\cos^2(t)\right)}dt\right) = 0$$

Exercice2: Résolvons les équations différentielles suivantes:

$$ch\,(x)\,y' + sh\,(x)\,y = \frac{1}{1+x^2} \tag{0.-4}$$

$$y'' + 5y' + 6y = \cos(x) + e^{2x} + \sin(2x) \tag{0.-3}$$

$*$ Pour integrer l équation différentielle $(0,5)$: $ch\,(x)\,y' + sh\,(x)\,y = \frac{1}{1+x^2}$, il suffit de remarquer qu' elle n'est rient d'autre que

$$\frac{d}{dx}\left(ch(x)y(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\arctan(x)\right)$$

qui par intération donne

$$ch(x)y(x) = \arctan(x) + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R}$$

Conclusion; La solution générale de $(0,5)$ est

$$y(x) = \frac{\arctan(x) + \kappa,}{ch(x)},\ \kappa \in \mathbb{R}$$

$*$ Considérons $(0,6)$ suivante

$$y'' + 5y' + 6y = \cos(x) + e^{2x} + \sin(2x)$$

Son équation homogène est

$$(H) :\ y'' + 5y' + 6y = 0$$

et son équation caractéristique est

$$(C) :\ r^2 + 5r + 6 = 0$$

dont le discriminant $\Delta = 5^2 - 4\times 6 = 1$ donne les solutions $r_1 = \dfrac{-5-1}{2} = -3$ et $r_2 = \dfrac{-5+1}{2} = -2$. Ainsi la solution générale de l'ESSM (H) est

$$y_0\,(x) = Ae^{-3x} + Be^{-2x} \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Pour déterminer une solution particulière de l'EASM $(0,6)$ on remarque que le second membre est la somme de trois fonctions $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = e^{2x}$

et $f_3(x) = \sin(2x)$. D'après le principe de superposition, si y_1, y_2 et y_3 sont des solutions particulières respectivement de

$$(E_1): \; y'' + 5y' + 6y = \cos(x)$$

$$(E_2): \; y'' + 5y' + 6y = e^{2x}$$

$$(E_3): \; y'' + 5y' + 6y = \sin(2x)$$

alors $y_p = y_1 + y_2 + y_3$ est une solution particulière de $(0,6)$.

- Comme $f_1(x) = \cos(x)$ donc il faut chercher y_1 sous la forme

$$y_1(x) = M\cos(x) + N\sin(x), \text{ où } (M,N) \in \mathbb{R}^2$$

de sorte que

$$y_1'(x) = -M\sin(x) + N\cos(x) \text{ et } y_1''(x) = -M\cos(x) - N\sin(x)$$

Par substitution dans (E_1), on aura:

$$(-M\cos(x) - N\sin(x)) + 5\left(-M\sin(x) + N\cos(x)\right) + 6\left(M\cos(x) + N\sin(x)\right) = \cos(x)$$

c'est-à-dire

$$(-M + 5N + 6M)\cos(x) + (-N - 5M + 6N)\sin(x) = \cos(x)$$

pour $x = 0$ puis $x = \dfrac{\pi}{2}$, on aura le système suivant

$$(s) \begin{cases} 5M + 5N & = 1 \\ 5N - 5M & = 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que $M = N = \dfrac{1}{10}$ et donc

$$y_1(x) = \frac{1}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)$$

- D'après le cours, une solution particulière de (E_2) est de la forme

$$y_2(x) = ae^{2x} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

car 2 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (C). Par dérivations on aura

$$y_2'(x) = 2ae^{2x} \text{ et } y_2''(x) = 4ae^{2x}$$

Par substitution dans (E_2) on obtient

$$4ae^{2x} + 5 \times 2ae^{2x} + 6 \times ae^{2x} = e^{2x}$$

c'est à-dire $20a = 1$ (puisque $e^{2x} \neq 0$) et par suite

$$y_2(x) = \frac{1}{20}e^{2x}$$

• $\omega = 2$ n'est pas racine de l'équation caractéristique (C), donc une solution particulière de (E_3) est de la forme

$$y_3(x) = \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x) \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Par dérivations on aura

$$y_3'(x) = -2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x) \text{ et } y_3''(x) = -4\alpha \cos(2x) - 4\beta \sin(2x)$$

En substituant dans (E_3) on obtient

$$-4\alpha \cos(2x) - 4\beta \sin(2x) + 5\left(-2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x)\right) + 6\left(\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)\right) = \sin(2x)$$

Ains

$$(-4\alpha + 10\beta + 6\alpha)\cos(2x) + (-4\beta - 10\alpha + 6\beta)\sin(2x) = \sin(2x)$$

soit

$$(2\alpha + 10\beta)\cos(2x) + (2\beta - 10\alpha)\sin(2x) = \sin(2x)$$

Prenons $x = 0$ puis $x = \frac{\pi}{4}$ pour aboutir au système

$$(s) \begin{cases} 2\alpha + 10\beta & = 0 \\ 2\beta - 10\alpha & = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = -5\beta \\ 52\beta & = 1 \end{cases}$$

D'où $y_3(x) = \frac{-5}{52}\cos(2x) + \frac{1}{52}\sin(2x)$.

Conclusion: la solution générale le l'EASM $(0, 6)$ est

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_p(x) \\ &= y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) \\ &= Ae^{-3x} + Be^{-2x} + \frac{1}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x) + \frac{1}{20}e^{2x} + \frac{-5}{52}\cos(2x) + \frac{1}{52}\sin(2x) \end{aligned}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$