Université Moulay Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2019/2020
LST Maths Appl
Module M147

Travaux dirigés : Suites et séries de fonctions
Série 1

Exercice 1
Soit $f_n(x) = x^n(1-x),\ x \in [0,1],\ n \geq 1.$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer sans intégration $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)dx.$

Exercice 2
Soit la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$$

1. Etudier la convergence uniforme de f_n sur $[0,1]$.
2. Vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

Exercice 3
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx.$$

Exercice 4

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \to \frac{\ln(x+n)}{n^2},\ n \geq 1.$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$.
   On note $S = \sum_{n\geq 1} f_n$.
2. Montrer que S est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et exprimer pour tout $x \in [0,+\infty[$ $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de sommes de séries.
3. En déduir que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que S est concave sur $[0,+\infty[$.

Exercice 5
Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. Déterminer l'ensemble D_f.
Exercice 6
Soit $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n},\ n \in \mathbb{N}.$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

2. Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$, calculer $S(x)$.
3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice (Facultatif)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \{^{(1-\frac{x}{n})^n \ si \ x \in [0,n[}_{0 \ sinon}$. On note que f_n est continue en n.

1. Construire les graphes de f_1, f_2, f_3 et f_4.
2. Vérifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $f :\to e^{-x}$ sur $[0, +\infty]$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$, on pose $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$
   (a) Montrer que la fonction g_n est positive sur $[0, +\infty[$.
   (b) Monter que pour $n \geq 2$ la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Dans les questions c et d, on prend $n \geq 2$
   (c) Montrer que la fonction g_n admet sur $[0, +\infty[$ un maximum atteint en un certain réel x_n de $]0, n[$.
   (d) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout x de $[0, +\infty[$, $0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{ne}$.
   (e) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0, +\infty[$