Université Moulay Ismaïl	A. U. 2018/2019
F. S. T. Errachidia	LST Maths Appl
Département de Mathématiques	Module M147

Travaux dirigés : Calcul de résidus

Exercice 1 *1. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x^2 + ixy^3$. Existe-t-il un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ tel que $f_{|U}$ est holomorphe ?*

2. Soit U l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Si $z = x + iy \in U$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = \ln |z| + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
Montrer que f est holomorphe sur U.

Exercice 2 *1. Calculer par la formule intégrale de Cauchy :*

$$\int_C \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z.$$

où C est le cercle unité $|z| = 1$ parcouru dans le sens direct.

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \cos(\sin\theta)\ e^{\cos(\theta)} \mathrm{d}\theta.$$

Exercice 3 *Soit f la fonction définie par*

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$$

1. *Déterminer les pôles de f avec leur ordre de multiplicité.*
2. *Calculer $Res(f, \frac{i\pi}{2})$.*
3. *Soient R un réel strictement positif et $\Gamma(R)$ le rectangle de sommets $-R$, R, $R+i\pi$ et $-R+i\pi$ orienté dans le sens positif. On notera également $\gamma_1(R)$ le segment orienté de $-R$ à R, $\gamma_2(R)$ le segment orienté de R à $R + i\pi$, $\gamma_3(R)$ le segment orienté de $R + i\pi$ à $-R + i\pi$ et $\gamma_4(R)$ le segment orienté de $-R + i\pi$ à $-R$.*
   (a) *Justifier que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2(R)} f(z)dz = 0$*
   (b) *Justifier que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_4(R)} f(z)dz = 0$*
   (c) *Exprimer $\displaystyle\int_{\gamma_3(R)} f(z)dz$ en fonction de $\displaystyle\int_{\gamma_1(R)} f(z)dz$*
   (d) *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx$*

Exercice 4 *Soit Γ_R le conteur défini par le segment $[-R, R]$ et le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de diamétre $[-R, R]$ parcouru dans le sens direct, avec $R > 1$.*

1. *Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z$.*
2. *En déduire que :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{e}.$$

3. *Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} \mathrm{d}x$.*